# Matematik – nu og i fremtiden: processer og produkter i skolens matematik

Jeppe Skott
DPU, Århus Universitet
MSI, Växjö Universitet

## Større problemer i skolematematik:

- Lærerkvalifikationer og læreruddannelse;
- 'Equity issues' – lige adgang til ordentlig matematik;
- Matematikken og de almenpædagogiske forpligtelser;
- Proces-produkt relationer i og omkring matematikundervisning;
- Mål-middel tænkning og en ny teknisk rationalitet.



## Dagens program

- To eksempler;
- En *reform* af matematikundervisningen;
- En matematisk vinkel på faglige processer;
- En læringsteoretisk vinkel på faglige processer;
- Får 'vi' det 'vi' forventer? – reformer og modreformer i matematikundervisningen.

## Eksempel 1: Lige og ulige i 3.C[1)]

- Antaget-fælles forståelser af *lige* som:
  - Hvert andet tal, når man starter med 2;
  - Dem der kan repræsenteres som to lige lange rækker af tællematerialer;
  - Dem der ender på 0, 2, 4, 6, eller 8.
- Spørgsmål:
  - Hvad sker der, når man lægger to ulige tal sammen?

[1)]Hansen, Skott & Jess (2006) s. 520 ff.



[Eksempel 1: Lige og ulige i 3.C, frtst]

Søren: Men hvis man tager 9 og 11, så er det jo 20, og det er jo lige.

Lærer: Er I alle sammen med på det? […] Hvordan ved vi, at 20 er lige?

Flere elever: Det ender på 0.

Lærer: Prøv nu lige at finde jeres kastanjer frem. Læg 9 og 11 med kastanjerne, så I kan se, at de begge er ulige.

[De begynder. Lidt efter Caroline går til ohp'en.]



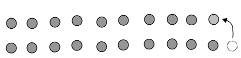
[Eksempel 1: Lige og ulige i 3.C, frtst]

Caroline: Så der er der 9 og der er 11. Så kan man flytte den sidste herop.

Lærer: Og hvordan kan man fra dine katanjer se, at 20 er et lige tal?

Caroline: Nu er der jo to lige lange rækker.

Lærer: Forstod i andre det? Er der nogen af jer andre, der vil prøve at forklare, hvad Caroline har tænkt?



Lærer: Men kan vi nu være sikre på, at hvis man tager to ulige tal, så vil resultatet altid være lige?

[ingen respons]

Mikkel: Kunne vi se af den måde Caroline lagde 9 og 11 på, at de var ulige tal? Det var jo rigtig fint, det Caroline gjorde, så vi kunne se at 9 + 11 var et lige tal. Men kunne vi se på den måde, hun lagde 9 og 11 på, at det var ulige tal?

[ingen respons]





Tine: Men det [et ulige tal] kan jo ikke lægges i to lige lange rækker.

Lærer: Nej. Hvis vi prøver med 9, hvordan vil det så komme til at se ud? Kom op og vis det.

[Tine tæller 9 kastanjer og flytter rundt på dem]

Lærer: Ja, prøv så også med 11.

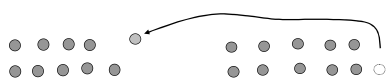
[Tine flytter rundt på de sidste 11 kastanjer]



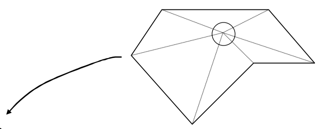


Tine: og så kan man gøre lige som Caroline, man kan flytte den ene fra 9 oven på den ene fra 11 [hun flytter den ene fra 11 oven på den ene fra 9].

Mikkel: 'Man kan flytte den ene fra 9 oven på den ene fra 11' – forstår I det? […] Hvorfor fortæller det, at så er det et lige tal, resultatet?



## Eksempel 2: vinkler i regulære polygoner



$$\frac{(n-2)\cdot 180}{n}$$

| n | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| v(n) | 60 | 90 | 108 | 120 | | |



| n | (n-2)*180/n | v(n+1)-v(n) |
|---|---|---|
| 3 | 60 | 30 |
| 4 | 90 | 18 |
| 5 | 108 | 12 |
| 6 | 120 | 8,5714286 |
| 7 | 128,57143 | 6,4285714 |
| 8 | 135 | 5 |
| 9 | 140 | 4 |
| 10 | 144 | 3,2727273 |
| 11 | 147,27273 | 2,7272727 |
| 12 | 150 | 2,3076923 |
| 13 | 152,30769 | 1,978022 |



| n | (n-2)*180/n | v(n+1)-v(n) |
|---|---|---|
| 3 | 60 | 30 |
| 4 | 90 | 18 |
| 5 | 108 | 12 |
| 6 | 120 | 8,5714286 |
| 7 | 128,57143 | 6,4285714 |
| 8 | 135 | 5 |
| 9 | 140 | 4 |
| 10 | 144 | 3,2727273 |
| 11 | 147,27273 | 2,7272727 |
| 12 | 150 | 2,3076923 |
| 13 | 152,30769 | 1,978022 |

$$\frac{((n+1-2)\cdot 180}{(n+1)} - \frac{(n-2)\cdot 180}{n}$$

$$= \frac{360}{n\cdot(n+1)}$$

Hvad nu hvis der var en n-kant og en (n+a)-kant?

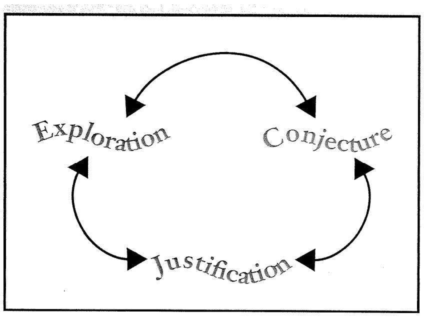
$$360\cdot\frac{a}{n\cdot(n+a)}$$

## Eksemplerne kendetegnet ved (bl.a.):

- Element af *udforskning* i en situation, hvor begreber og procedurer er antaget-fælles;
- Formulering af nye *spørgsmål* og *formodninger* med udgangspunkt i symboliseringer af hidtidige resultater;
- *Forklaringer* og *begrundelser* formuleres med reference til de antaget-fælles begreber og procedurer.



## Ræsonnementer og beviser (NCTM, 2008)






## Dagens program

- To eksempler;
- En *reform* af matematikundervisningen;
- En matematisk vinkel på faglige processer;
- En læringsteoretisk vinkel på faglige processer;
- Får 'vi' det 'vi' forventer? – reformer og modreformer i matematikundervisningen.

## Et “nyt” syn på skolefaget

- The general perception was that students had not only failed to master the abstract ideas they were being asked to grapple with in the new math, but they had also failed to master the basic skills […] In a dramatic pendulum swing, the new math was replaced by the back-to-basics movement […] the fancy theoretical notions underlying the new math had not worked and […] as a nation we should make sure that our students had mastered the basics.





- By the end of the 1970s it became clear that the back-to-basics movement was a failure. A decade of curricula that focussed on rote mechanical skills produced a generation of students who, for lack of exposure and experience, performed dismally on measures of thinking and problem solving.

(Schoenfeld, 1992, p. 336)



## 1. *Standards 2000*

1. Number & operations
2. Algebra
3. Geometry
4. Measurement
5. Data analysis & probability

The content standards

## 1. *Standards 2000* (ctd.)

6. Problem solving
7. Reasoning & proof
8. Communication
9. Connections
10. Representation

The process standards



## *Reformen* som reaktion:

- *Reformen* – en reaktion på læringsproblemer med en 'procesfri' undervisning: elever overtager ikke nødvendigvis de forståelser som læreren eller lærebogen foreskriver;
- *Reformen* – en reaktion på et dominerende syn på faget som procesfrit: faget skal ikke opfattes som et sæt af isolerede og eviggyldige fakta.
- *Reformen* en reaktion på en alt overvejende individuel tilgang til matematisk aktivitet.



## Dagens program

- To eksempler;
- En *reform* af matematikundervisningen;
- En matematisk vinkel på faglige processer;
- En læringsteoretisk vinkel på faglige processer;
- Får 'vi' det 'vi' forventer? – reformer og modreformer i matematikundervisningen.

## Lakatos og fallibilismen

[the book's] modest aim is to elaborate the point that informal, quasi-empirical, mathematics does not grow through a monotonous increase of the number of indubitably established theorems but through an incessant improvement of guesses by speculation and criticism, by the logic of proofs and refutations

(Lakatos, 1976, p.5)



## Davis & Hersh: Den matematiske erfaring

It is reasonable to propose a different task for mathematical philosophy, not to seek indubitable truth, but to give an account of mathematical knowledge as it really is - fallible, corrigible, tentative, and evolving, as is every other kind of human knowledge

(Davis & Hersh, 1981, p. 406).



## Two facts about mathematics:

Fact 1 is that mathematics is a human invention ... Arithmetic and geometry come from the same place as homotopy theory - from the human brain...

Fact 2 is that these things we bring into the world ... are mysterious to us, their creators. They have properties which we discover only by dint of great effort; they have other properties which we try in vain to discover; they have other properties which we do not even suspect [...]

## [Two facts, frtst.]

These imaginary objects have definite properties. There *are* true facts about imaginary objects

(Davis & Hersh, 1981, pp.407-8)



## 'True'? 'Imaginary'?

| | True | Preliminary |
|---|---|---|
| Real (exp.!) | Platonism | The reform |
| Imaginary | D & H | |



## En faglig vinkel på *reformen*: matematik og skolematematik

Skolematematik:

"*doing* mathematics means following the rules laid down by the teacher; *knowing* mathematics means remembering and applying the correct rule when the teacher asks a question; and mathematical *truth is determined* when the answer is ratified by the teacher".

(Lampert, 1990, s. 32)

## En faglig vinkel på *reformen*: matematik og skolematematik

Matematik

"[m]athematical discourse is about figuring out what is true, once the members of the discourse community agree on their definitions and assumptions"

(Lampert, 1990, s. 42).

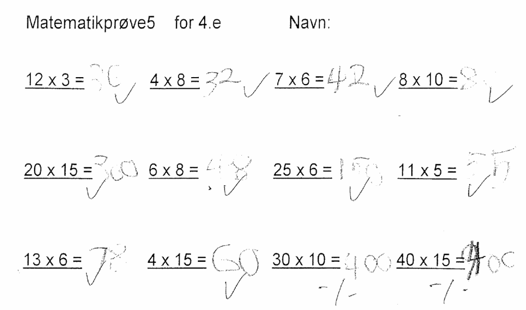


## Dagens program

- To eksempler;
- En *reform* af matematikundervisningen;
- En matematisk vinkel på faglige processer;
- En læringsteoretisk vinkel på faglige processer;
- Får 'vi' det 'vi' forventer? – reformer og modreformer i matematikundervisningen.



## Eksempel 3: Mikkel i begyndelsen af 4.



De følgende regnestykker er divisionsstykker.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 : 4 = 3 √ | 24 : 3 = 8 √ | 50 : 5 = 10 √ | 16 : 2 = 8 √ |
| 20 : 5 = 4 √ | 18 : 6 = 3 √ | 75 : 3 = 25 √ | 90 : 2 = 45 √ |
| 36 : 9 = 4 √ | 64 : 8 = 8 √ | 72 : 9 = 8 √ | 150 : 6 = 25 √ |

4 fejl ud og 48

---

Matematikprøve5 for 4.e Navn:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 x 3 = 36 √ | 4 x 8 = 32 √ | 7 x 6 = 42 √ | 8 x 10 = 80 √ |
| 20 x 15 = 300 √ | 6 x 8 = 48 √ | 25 x 6 = 150 √ | 11 x 5 = 55 √ |
| 13 x 6 = 78 √ | 4 x 15 = 60 √ | 30 x 10 = 400 -/- | 40 x 15 = 400 -/- |



---

## Mikkels kommentar:

30 x 10 = 400
-/-

- ... det er //men det er jo 10 gange 30 og så er det 20 gange 20 og det er jo 400.

## Mikkel et forkert svar, men -

- Han generaliserer en rigtig, additiv procedure;
- Han genkender en symmetri om et helt antal tiere;
- Han ved at 20 × 20 = 400.



## Assimilation - at betragte en erfaring som et eksempel på noget kendt:

"Cognitive assimilation comes about when a cognizing organism fits an experience into a conceptual structure it already has."

"This means that the organism remains unaware of whatever (from an observer's point of view) does not fit into the conceptual schemes it has already constructed."

(Von Glasersfeld, 1995, p. 62-63)



## Akkommodation – når en ny erfaring ikke passer med det, man tror:

Når man ikke kan passe en ny erfaring ind i de forståelser, man allerede har, og man derfor må ændre sin måde at tænke på. Hvis man er bvevidst om den proces, kan den føre til overraskelse, fovirring, ...

## Et kognitivt skema – en kombination af

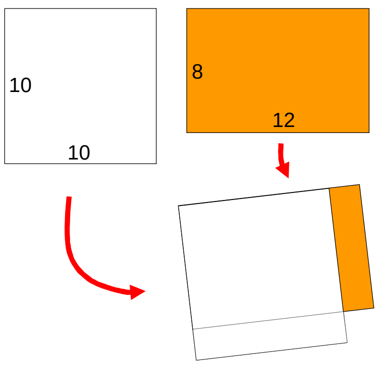
1. en situation man oplever eller sanser
   (a) et element af assimilation
   (b) en mulig senere akkommodation: *kan en sådan situation også se sådan ud!*
2. en aktivitet som respons til situationen
   (a) en mulig senere akkommodation
3. et forventet resultat af aktiviteten
   (a) en mulig senere akkommodation
   (b) mulig akkommodation af hele skemaet



## Andre mulige reaktioner på Mikkels svar -

- At bede ham forklare sin tænkning for klassen eller fortælle om en anden dreng, der troede at 95 × 105 = 100 × 100, men det var det ikke ...
- Er der mon et mønster i forskellene mellem 13 × 7; 12 × 8; 9 × 11 på den ene side og 10 × 10 på den anden?
- Er der mon en multiplikativ parallel til Mikkels additive regel?
- Hvordan ser det her ud med rektangulære representationer?





## Dagens program

- To eksempler;
- En *reform* af matematikundervisningen;
- En matematisk vinkel på faglige processer;
- En læringsteoretisk vinkel på faglige processer;
- Får 'vi' det 'vi' forventer? – reformer og modreformer i matematikundervisningen.

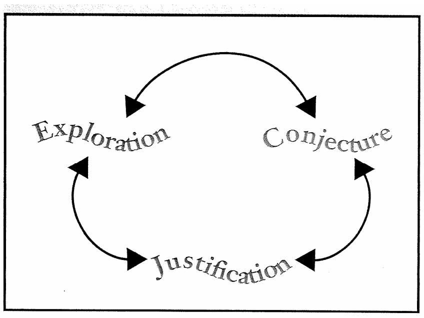


## Freudenthals ten *major problems* (1980)

3. How to use progressive schematisation and formalisation in teaching any mathematical subject whatever?
4. How to keep open sources of insight during the training process? How to stimulate retention of insight [while] schematising?
5. How to stimulate reflecting on one's own physical, mental and mathematical activities?
6. How to develop a mathematical attitude?



## Ræsonnementer og beviser (NCTM, 2008)



## Eksemplerne igen, igen

- Eksempel 1: Ulige plus ulige giver ...
  - Den underbyggede matematiske fortælling om tals paritet og addition;
  - Den matematiske fortælling om generaliserede sammenhænge.
- Eksempel 2: Vinkler i regulære polygoner ...
  - Den underbyggede matematiske fortælling om vinkelmål og vinkelstørrelser i regulære polygoner;
  - Den matematiske fortælling om generaliserede sammenhænge.



## Wenger og historien om de to stenhuggere

- "I am cutting a perfect cube"
- "I am building a cathedral"



## Moraler: matematik nu og i fremtiden

- "Vi" fik ikke det, vi forventede (det gør man heller ikke med den nuværende modreform);
- "Vi" burde have været mere orienterede mod
  - proces-produkt dualitet og ikke fortælle endnu en historie om dikotomi;
  - De kontekstuelle bindinger.
- fordi
  - Det matematisk og læringsmæssigt giver mening;
  - "vi" kunne (måske) have undgået modreform.