Matematiske situationer på dansk

Rapport efter første år af et udviklingsprojekt under NAVIMAT

Simon Cort Graae

Hans Christian Hansen

Kristine Jess

December 2009

INDHOLD

INDHOLD

INDLEDNING

Denne publikation indeholder de vigtigste resultater fra arbejdet med udvikling af og afprøvning på dansk grund af matematiske situationer , en teori der oprindelig er udviklet i Frankrig af Brousseau og hans kolleger. Arbejde er foregået i regi af et større projekt, der blev formuleret i et samarbejde mellem Spanien og Danmark og som der for fik akronymet SPADAMA-

NAVIMATPROJEKTET SPADAMA

Dette projekt opstod i forlængelse af et flerårigt samarbejde mellem matematiklærerne på Københavns Dag- og Aftenseminarium og Doctor José Maria Marbán, Escuela Universitaria de Educaciòn de Soria m.fl. fra Spanien, og havde oprindeligt titlen *The development of professional competencies linked to teacher training by using virtual communities of learning in international contexts: a mathematical education proposal.*

Vi tog udgangspunkt i det fælles europæiske grundlag som vi finder i Bologna-erklæringen, hvor 29 europæiske lande udtrykte enighed om at ville styrke en kompetencebeskrivelse af deres højere uddannelser med henblik på at øge kvalitet, sammenlignelighed og arbejdskraftens bevægelighed. Den nyeste bekendtgørelse om læreruddannelse i Danmark (2006) er således forankret i Bologna-erklæringen.

Da vi i Danmark har arbejdet på at beskrive både faglige og pædagogiske kompetencer inden for matematik i kompetencetermer, var det naturligt, at vi deltog i det europæiske samarbejde omkring professionelle matematikkompetencer, i dette tilfælde på læreruddannelsesområdet.

Hovedopgaverne i projektet skulle være
- Udvikling af et fælles sprog omkring kompetencer
- Udvikling af og afprøvning af didaktiske situationer

I praksis blev bevillingerne i Spanien fra ministeriet for videnskab og vores bevilling fra NAVIMAT forskudt således at vi kun periodevis kunne arbejde sammen på projektet. Med den forsinkede projektstart i forhold til det spanske moderprojekt blev projektet noget modificeret i den reviderede tidsplan blev aftalt med NAVIMAT.

UDVIKLING AF KOMPETENCETÆNKNING

Den del, der havde at gøre med at overføre dansk matematikkompetencetænkning til Spanien, blev gennemført i 07-08 ved besøg af de danske lektorer via Erasmusudveksling. Herunder er der bl.a. blevet afholdt seminarer om kompetencetænkning i Soria. Det blev aftalen at José Maria Marbán selv skulle videreføre udviklingen af kompetencetænkningen i Spanien efter yderligere feststudier i Danmark og gennemgang af litteratur.

Han var i mellemtiden blevet dekan for seminarieafdelingen i Soria, og fik ikke mulighed for at arbejde før han fik et nyt stipendium fra myndighederne i Spanien og orlov fra sin stilling i fire måneder. Men i foråret 2009 kunne vi lægge nyheden om hans besøg hos os ud på UCC's hjemmeside:

> **Spansk dekan på studieophold på UCC**
>
> Den spanske matematikdidaktiker José Maria Marbàn er lektor ved universitetet i Valladolid og dekan for universitetets lærerskole i Soria, hvor der er 550 lærer- og pædagogstuderende. Han har i foråret 2009 fået et forskningsstipendium fra det spanske ministerium for videnskab og innovation til at forske i fire måneder ved UCC med base i matematikmiljøet på KDAS.
>
> Hans forskningsprojekt går ud på at finde metoder til evaluering af matematiklæreres professionskompetencer og korrelere disse med elevernes præstationer ved PISA-testene. Slutmålet for arbejdet er at udvikle nyt curriculum for matematiklæreruddannelsen. (Internt nyhedsbrev UCC Uge 7, 2009)

Hans arbejde blev i dansk sammenhæng fremlagt og evalueret ved at han 27. April 2009 fremlagde sine resultater for NAVIMATs projektforum I Odense under titlen: *Professional competencies of mathematics teachers from an international perspective: An on-going study*.

Dette arbejde blev også fremlagt ved mødet I Danmarks Matematikundervisningskommission , torsdag d. 12. Maj 2009 på Matematisk Institut under Danmarks Tekniske Universitet, og er på vej mod publikation.

UDVIKLING AF OG AFPRØVNING AF DIDAKTISKE SITUATIONER I DANMARK

José Maria Marbàn deltog også i planlægningsfasen af den anden del af projektet: " Udvikling af og afprøvning af didaktiske situationer", men derefter lå ansvaret for projektet hos de danske deltagere, som først ved midtvejsevalueringen inddrog reaktioner fra vores spanske partner i projektet.

I selve projektperioden 08-09 lagde vi vægt på at analysere og udvikle didaktiske situationer til undervisningen i Danmark, både på seminarieniveau og folkeskoleniveau. Og der er resultatet af disse undersøgelser vi har valgt at præsentere i denne publikation.

I dette arbejde trak vi på forskellige kilder og samarbejdspartnere, Hvad angår selve det teoretiske grundlag, så havde to fra projektgruppen (Kristine Jess og Simon Cort Graae) allerede sammenskrevet en del af det teoretiske grundlag for didaktiske situationer i matematik. Det er en bearbejdet udgave af deres tidlige arbejde vi præsenterer som kapitel 1 i denne publikation

Vi har fast deltaget i NAVIMAT's Projektforum, hvor vi især har fået sparring fra Carl Winsløw og fra Lotte Skinnebach. Vi har via Carl været til seminarer om didaktiske situationer på Københavns

Universitet, hvor vi bl.a. har knyttet god kontakt med den franske matematikdidaktiker Isabelle Bloch, hvilket skulle vise sig at få stor betydning for projektets udvikling.

Efter deltagelse i NORMA-konferencen i foråret 2008 og Michelle Artigues foredrag om *Didactical Design in Mathematics Education* var lidt pessimistiske med hensyn til om didaktiske situationer i det hele taget kan overføres fra en situation til en anden. Artique, der er blandt de mest aktive og ledende inden for den franske didaktik sluttede sin præsentation med følgende konklusion:

- The history of didactical engineering evidences its usefulness when considered as a research tool.
- But it also evidences that French didacticians never made the necessary efforts for transforming it into the development tool aimed at initially.
- Moreover a retrospective look at the didactical engineering produced by research makes clear that transforming most of these into something useful for the ordinary classroom and the ordinary teacher is far from being a trivial task[1].

Hun siger altså kort og godt at de franske didaktikere ikke har levet op til den oprindelige vision med at gøre deres teori frugtbar i praktisk undervisning og et sådant udviklingsarbejde slet ikke er så let.

På den ene side var vi optaget af tanken om at teorien om didaktiske situationer måtte kunne give bidrag til undervisningen i Danmark, men på den anden måtte vi erkende at en kapacitet på området advarede om store vanskeligheder i et sådant udviklingsarbejde.

Her gav Isabelle Bloch et år senere et velargumenteret og mere optimistisk syn på vores projekt. Vi har derfor fulgt den plan for udvikling af didaktiske situationer som Isabelle foreslog. Hendes fire nivauer er

> 1. Apriory analysis: Til hvert stykke viden er der en række situationer, der udløser og løses af dette stykke viden. Dette er et stykke epistemologisk arbejde, der kan foregå central på et universitet eller udviklingsinstitut.
>
> 2. På lærerniveauet skal den eksperimentelle situation udformes – de didaktiske variable justeres. Der vælges et scenario

[1] Hendes præsentation findes pr. 2. Dec 2009 på nettet: http://www.dpu.dk/Everest/Publications/Medarbejdere/mmi/norma/20080505213034/CurrentVersion/ArtigueNORMA08.pdf . Der referes til dias nummer 22/23.

3. Lærerens kendskab til de studerende indregnes: Hvad ved de på forhånd, hvad vil resultatet af situationen blive? Hvad bliver den institutionaliserede viden.

4. Realiteten, brugen i situationen i en faktisk klasse.[2]

Fordelen er, at de første to niveauer har stor grad af overførbarhed mellem forskellige klasser, og kan bruges til at overføre ideer mellem forskellige skolesystemer og lande. Så her er der faktisk mulighed for at udføre et arbejde af mere permanent værdi.

Vi ønskede dog at gennemgå alle fire niveauer i vore pilotprojekter i 2008/09, altså i vore hjemmeudviklede didaktiske situationer. Kun på den måde kunne vi blive helt dus med spændingsfeltet mellem teorien og praksis i de danske skoler og den danske læreruddannelse. I nærværende publikation har vi udvalgt to didaktiske situationer der kan være eksemplariske for anvendelsen af teorien henholdsvis dansk skole og dansk læreruddannelse. I kapitel II udvikler og afprøver vi en situation om funktionsbegrebet afpasset til og afprøvet på sluttrinet i den danske folkeskole. I dette arbejde var vi heldige at få kontakt med nogle folkeskolelærere, der gerne ville indgå i projektet, nemlig Tine Juncker, matematiklærer på Enghavegaard Skole, Søborg og Mette Graae, matematiklærer på Egebjergskolen, Ballerup.

PROJEKTETS AFSLUTTENDE FASE

Vi præsenterer således resultatet af vores pilotprojekter i denne publikation, men arbejdet fortsatte i foråret 2009 med en studierejse til Isabelle Bloch i Pau i Frankrig nær Pyrenæerne. På denne rejse blev der indsamlet megen skriftlige dokumentation af den franske udviklingsarbejde med didaktiske situationer, fotos og båndoptagelser af børn i skoler samt afklaring ved diskussioner med kolleger. Der ligger også en del bånd og videooptagelser fra de danske skoler og venter på bearbejdning.

Vi regner med at en behandling af dette materiale vil muliggøre en alfa-version af et udvalg af didaktiske situationer til den danske folkeskoles matematikundervisning, og vi håber igen at være heldige at få dem afprøvet før vi skriver den endelige afrapportering fra det samlede projekt. Afrapporteringen kunne evt. være i form af en lærerens bog om didaktiske situationer i matematik.

Desværre blev det ikke muligt at fuldføre denne sidste fase allerede i året 2009/10, da optaget på matematik i læreruddannelsen på Blaagaard/KDAS blev en del større end forventet. For ikke at skulle afvise bl.a. 30 meritstuderende på venteliste, blev vi nødt til at konverterer vores udviklingstid for NAVIMAT til normal undervisning og fik dermed givet alle på læreruddannelsen en chance for at gå i gang med matematik. Efter aftale med centerleder Mette Andresen fik vi lov at forskubbe vores projektbevilling og vores afrapportering, så vi udfører projektets sidste faser i efteråret 2010 og afrapporterer i starten af 2011.

[2] Personlig kommunikation

1: DIDAKTISKE SITUATIONER

I vores søgen efter alternativer til nuværende undervisning på linjefaget, som ville kunne inspirere de studerende til at indgå aktivt i undervisningen, valgte vi at inddrage Guy Brousseau, en fransk didaktiker med stor international anerkendelse. Da vi begyndte at sætte os ind i den ret svært tilgængelige teori om "didaktiske situationer", var denne endnu ikke beskrevet på dansk. Dvs. muligheden for på grundskoleplan at drage nytte af en spændende tilgang til matematikundervisning, der forener fagfaglighed og fagdidaktik, praktisk taget ikke var til stede. Men i foråret 2006 udkom en bog på dansk (Winsløw, 2006), hvor der er skrevet 20 sider om teorien. Vores tilgang er dog langt mere rettet mod praksis, og således supplerer de to beskrivelser hinanden.

Guy Brousseau har gennem en årrække arbejdet med mange aspekter af matematiklæring. I Danmark er han nok mest kendt for "den didaktiske kontrakt", skønt ikke alle her er enige om fortolkningen af dette begreb. Og som en af hans medarbejdere, Durand-Guerrier, udtrykte det under et besøg på Danmarks Lærerhøjskole i 2003, så har den didaktiske kontrakt fået uforholdsmæssig stor opmærksomhed på bekostning af den virkelig centrale nyskabelse hos Brousseau, nemlig de "didaktiske situationer". Vi mener, at begge begreber er så centrale og brugbare, at de bør indgå i uddannelsen af danske matematiklærere, idet vi dog vil tage lidt lettere på teorifundamentet for at fokusere på praktiske eksempler og den del, der er tættere på undervisningen.

Som så megen anden nyere pædagogik er teorien om "didaktiske situationer" udviklet ud fra en forestilling om, at elever ikke lærer ved at få stoffet forklaret af en lærer. Det er da heller ikke i valget af en konstruktivistisk erkendelsesteori, at Brousseau adskiller sig fra andre nyere matematikdidaktikere. Men i hans opfattelse af det fænomen, at en lærer forklarer noget stof for en elev, indeholder en række uheldige elementer, som der må tages højde for på en måde, der grundlæggende ændrer undervisningssituationen.

Brousseau påpeger det kunstige ved at stille spørgsmål i en undervisningssituation. Læreren stiller spørgsmål, som han/hun godt selv kender svaret på. Uden for undervisningssituationer stilles spørgsmål for at få et svar på noget, som man ikke ved. Men når læreren stiller et spørgsmål, så må der nødvendigvis være et svar, som det så bliver centralt for eleven at finde. Det er for at frigøre eleverne fra denne kunstige og lidet produktive rolle, at Brousseau har udformet ideen om "didaktiske situationer", der stærkt forenklet går ud på at udtænke en opgave/problemstilling, hvor eleverne bliver nødt til at lære sig det tilsigtede via arbejde med indholdet, og uden at have ret meget direkte kontakt med læreren. Før vi præsenterer "didaktiske situationer" vil vi kort redegøre for "den didaktiske kontrakt", da teorien om "didaktiske situationer" er et opgør med den traditionelle didaktiske kontrakt.

DEN DIDAKTISKE KONTRAKT

Begrebet, den didaktiske kontrakt, blev indført i matematikkens didaktik af Brousseau omkring 1980. Dette begreb adskiller sig fra introduktionen af en pædagogisk kontrakt i klassen derved, at når sidstnævnte ekspliciterer mål og succeskriterier for de skolemæssige aktiviteter, så insisterer den didaktiske kontrakt på det faktum, at den allerede eksisterer i den didaktiske situation (Astolfi et al., 1997). Kort sagt den didaktiske kontrakt, som altid er implicit, udgøres af en mængde af særlige måder at opføre sig på, der er forventet af eleven, at læreren opfylder, og omvendt er forventet af læreren, at eleven opfylder. Den gælder for al undervisning.

Til uddybning heraf citerer vi Brousseau: "In a teaching situation, prepared and delivered by a teacher, the student generally has the task of solving the (mathematical) problem she is given, but access to this task is made through interpretation of the questions asked, the information provided and the constraints that have been imposed, which are all constants in the teacher's method of instruction. These (specific) habits of the teacher are expected by the students and the behaviour of the student is expected by the teacher; this is the didactical contract." (Brousseau 1997, p. 225).

Den didaktiske kontrakt rummer interessante paradokser, idet lærerens opgave er at undervise og elevens opgave er at lære sig noget. Men eleven ved, at læreren kender svaret på det, som denne spørger om. Men eleven ved også, at læreren ikke vil give svaret, så derfor forsøger eleven at gætte det. Derved undgår eleven at beskæftige sig med det faglige indhold. Der er et – i Frankrig - meget kendt eksempel på dette:

Ombord på et skib var der 10 geder og 26 får. Hvor gammel var kaptajnen?

Det viser sig, at 76 ud af en gruppe på 97 franske elever i 2. og 3. klasse svarer, at kaptajnen er 36 år gammel. Denne tendens forværres, når eleverne kommer op på højere klassetrin (Winsløw, 2006, s. 147).

Læreren ønsker på sin side, at i hvert fald nogle elever er i stand til at svare rigtigt og forsøger derfor at "hjælpe på gled" ved forskellige vejledende kneb (Topaze effekten). En anden effekt er læreren tilbøjelighed til at opfatte noget rigtigt i elevens svar, selv om der er et meget spinkelt grundlag for dette (Jourdan-effekten), (Durand-Guerrier, 2003)

Som man kan se af tekniske termer som Topaze-effekt og Jourdan-effekt, så er vi her i en for danske læsere fremmed begrebsverden, der ofte i en hurtig vending omtales som "den franske skole" i matematikdidaktik. Spanien er et af de steder hvor Brousseau og den franske skole dyrkes meget, og vi har haft meget glæde af vor spanske udvekslingslærer og senere samarbejdspartner José María Marbán, der med stort engagement har beskrevet fordelene ved at arbejde med den franske skoles didaktik i læreruddannelsen. Således har han givet os en liste over vigtige opmærksomhedsfelter i forbindelse med den didaktiske kontrakt.

Opmærksomhedsfelter i den didaktiske kontrakt:

- Læreren og eleven befinder sig i et asymmetrisk forhold

- Læreren er forpligtet på at tilrettelægge en undervisning, som er mest mulig befordrende for elevernes læreprocesser

- Den didaktiske kontrakt giver forskellige roller for det at have med matematik at gøre

- Læreren er nærmere teorien end eleven, og eleven er nærmere praksis end læreren

- Læreren beslutter, hvad eleverne skal lære og hvad de ikke skal lære

- Læreren skal tage vare på kronologien i det, der skal læres (José 2006, personlig samtale).

Det er i de her nævnte forhold om en traditionel didaktisk kontrakt, Topaze-effekt og Jourdan—effekt at, man kan se behov for en ændring. Og det er bl.a. heri, at Brousseau finder retfærdiggørelsen for at fremsætte teorien om didaktiske situationer, hvor det er hensigten, at eleverne skal frigøres fra lærerens forklaringer og forventninger og konfronteres direkte med stoffet gennem passende udfordrende faglige problemstillinger.

TEORIEN OM SITUATIONER

Det er efterhånden en fælles erfaring i den internationale litteratur om didaktiske situationer, at den er svær at forklare uden indledende eksempler. Vi starter derfor med et eksempel, som vi har lånt fra José María Márban.

Det er et undervisningsforløb, hvor målet er, at et lille barn skal lære sig at tælle og kommunikere om tal. Underviseren, her omtalt som læreren, har tilrettelagt en situation, en række af opgaver, hvor det efterhånden viser sig, at der er nødvendigt at kunne tælle for at klare udfordringen i opgaven. Det betyder, at barnet via arbejdet med opgaverne så at sige automatisk kommer til at opleve et behov for at kunne tælle og kommunikere om tal. Det er ikke lærerens direkte henvendelse til barnet, der skal føre til dette, men situationen barnet befinder sig i[3].

På et bord er stillet **3** tallerkener. Barnet skal hente gafler og lægge én ved hver tallerken.

At der kun er 3 tallerkener muliggør, at barnet kan se antallet for sig.

Herefter anbringes **20** tallerkener uordentligt på bordet, og nu er en ny strategi påkrævet. Barnet kan dog blot hente mange gafler og gå retur med de tiloversblevne.

Situationen gentages med 20 tallerkener kaotisk anbragt. Men **nu må barnet ikke gå retur med tiloversblevne gafler, antallet skal passe**. Barnet behøver dog ikke at tælle, men kan hente et antal, gafler, der svarer til alle fingre to gange. (én-til-én-afbildning).

[3] Derfor kaldes situationen a-didaktisk, uden for lærerens direkte didaktiske intervention.

Nu ændres situationen igen, idet barnet skal råbe til en person i et andet rum (køkkenet) og bede om at **få bragt gaflerne**, dvs. nu er det nødvendigt at tælle og kunne sige tallet. Barnet oplever et behov for at kunne tælle og kommunikere om tal.

Det er væsentligt at bemærke, at det ikke er tanken, at børnene selv skal forsøge at generalisere det indledende eksperiment og forsøge med flere end 3 tallerkener. Pointen er, at man netop ved at ændre på situationen så at sige kan tvinge eleverne væk fra en utilstrækkelig metode frem til en mere effektiv metode.[4]

Vi vil nu se på den del af teorien om didaktiske situationer, der knytter sig til undervisning, og som ligger bag dette eksempel.

SITUATIONER OG MATEMATIKUNDERVISNING

Om begrebet "situation" skriver Brousseau: "We gave the name "situation" to a model of the interaction of a subject with a certain milieu which determines a given knowledge as a means for the subject, of obtaining or conserving a favourable state in this milieu … Note that the same word "situation" serves, in its ordinary meaning, to describe not only the set (not necessarily determined) of conditions surrounding an action, but also the theoretical and possibly formal model used to study it" (Brousseau, 1999, p. 4).

Overordnet set sker læring i mange forskellige situationer, som kan forekomme både i og uden for skolen. Barnet kan lære sig noget uden for skolen, fx ved at lege/eksperimentere, men det sker uden, at nogen – heller ikke barnet selv – nødvendigvis har haft en intension om at læring skulle finde sted. Denne situation kaldes non-didaktisk.

I skolen er der klart en intension om, at læring skal finde sted i de tilrettelagte situationer, der bliver opdelt i to forskellige typer: den didaktiske og den a-didaktiske. I den didaktiske del er læreren

[4] Man kunne have den indvending, at børn normalt ikke skal motiveres specielt for at lære sig at tælle og kommunikere om tal. Ligeledes vil man som dansker også nemt kunne forestille sig børn, der blot nægtede at være med i "legen". Derfor nævnte José da også, at barnet/børnene måske skal gennemføre dette forløb i konkurrence med et andet barn eller en gruppe af børn for at konkurrencen skal virke motiverende. Der er meget at tage højde for på forhånd i situationen. Derfor bruges også udtrykke "didactical engineering" om tilrettelæggelsen af sådanne situationer.

aktiv som underviser, i den a-didaktiske har eleven overtaget scenen og skal arbejde i det af læreren tilrettelagte miljø, fri af lærerens forklaringer og forventninger. Se figur 1[5].

Figur 1

Situation
- **med intension**
  - **a-didaktisk**
  - **didaktisk**
- **uden intension** — **non-**

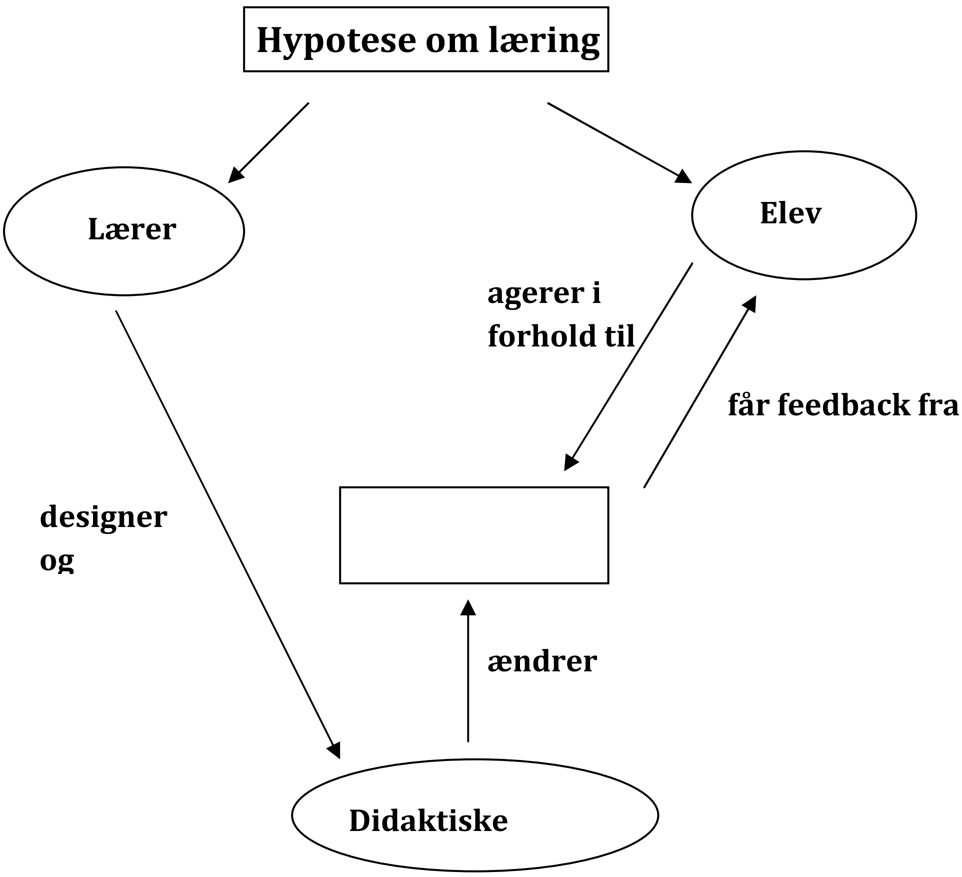
Hvorfor didaktiske situationer? Brousseau hævder, at den særlige didaktiske kontrakt, der har været fremherskende i den såkaldt traditionelle matematikundervisning, bygger på en fejlagtig opfattelse af, at viden kan overføres, og derfor ikke fører til at eleverne lærer matematik, men måske snarere lærer at afkode bestemte forventninger hos læreren og lærer sig en bestemt opfattelse af, hvad matematik er – eller går ud på. Det viser fx eksemplet med kaptajnen, hvor eleverne får oplyst nogle tal, og nu gælder det om at finde det svar, som læreren jo godt kender, og regningsarten må være plus, det giver et rimeligt resultat. Det er erfaringer som disse, der gør, at Brousseau tager afstand fra den traditionelle undervisningsform og mener, at denne bør undgås i videst muligt omfang.

[5] Udformningen af figur 1 er inspireret af José María Marbán (2006)

Dette er baggrunden for hans hypotese om læring, der bygger på den konstruktivistiske idé og udmøntes i elevens arbejde i frugtbare situationer, hvor en god håndtering af situationen automatisk vil have indløst en eller flere vigtige faglige pointer. Hele samspillet omkring en sådan situation vises i en model på figur 2.

Model af samspillet mellem lærer, situation og elev

Figur 2



Inspiration til modellen fra José María Marbán 2006

I modellen i figur 2 indgår "didaktiske variable". Her kan man fx tænke på de forøgede krav til arbejdet med tal i det indledende eksempel, hvor omtalen af didaktiske variable i øvrigt er fremhævet med fed skrift. En didaktisk variabel har sin helt specifikke værdi i form af at udgøre netop det, der får/tvinger eleven til at skifte til en ny strategi.

ADIDAKTISK SITUATION

Af figur 2 fremgår, at undervisningen ikke skal foregå direkte fra lærer til elev, men foregå gennem didaktiske situationer, som er undervisningsforløb, der er nøje planlagt ud fra en bestemt hensigt om en bestemt viden, som det er hensigten, eleven skal tilegne sig. Den væsentligste intension med at lade undervisningen foregå gennem en didaktisk situation er, at eleven skal træde selvstændigt ind på banen, han/hun skal være uden for påvirkninger af de forventninger, han/hun forventer, at læreren har. Eleven skal agere i forhold til problemstillingen/opgaven. Denne læreløse tilstand, som eleven hermed bliver bragt i, benævner Brousseau en a-didaktisk situation. Dette er et meget væsentligt begreb hos Brousseau, og senere beskriver vi en række krav til netop en a-didaktiske situation.

Det kan undre, at lærerens konstante nærvær søges undgået, for hvordan får eleverne så korrigeret fejlagtige slutninger? Som vi så i eksemplet med tallerkener og gafler, sker denne korrektion i forhold til problemstillingen/opgaven, idet der er indbygget feedback. Fx hvis barnet i eksemplet ikke har det rigtige antal gafler med, og det er forbudt at gå retur med nogle, så giver situationen feedback, da det er synligt for barnet, at der er nogle tilovers/eller mangler.

Vi kan nu trække op, hvilke krav der stilles til den a-didaktiske del, når det angår det, som Brousseau betegner fundamentale didaktiske situationer. Ved fundamentale didaktiske situationer forstås et forløb, der er designet med henblik på, at eleverne skal lære noget helt bestemt, fx som vi så i eksemplet med tallerkenerne og gaflerne. For at den a-didaktiske del skal lykkes må den designede fundamentale situation være opbygget, så der indgår didaktiske variable, der kan ændres i takt med elevens udvikling ved arbejdet med den forelagte opgave. Desuden skal de følgende punkter tilstræbes opfyldt:

Idéelle krav til fundamentale didaktiske situationer

1. Eleven skal have forkundskaber/forforståelser, så de kan forstå opgaven og forstå udfordringen, så de kan deltage. Eleven skal være i stand til at foreslå et svar baseret på allerede tilegnet viden, fx 3 gafler til 3 tallerkener. Men svaret skal hurtigt vise sig at være utilstrækkeligt eller forkert, således at eleven bliver nødt til at udvikle ny viden.

2. Der må i situationen være indbygget en måde, så eleverne kan validere deres strategi, uden at læreren behøver at gøre noget.

3. I situationen må der være indbygget usikkerhed, så eleven ikke på forhånd kan afgøre, om en ny strategi, de skal afprøve, er OK.

4. Der skal forekomme feedback fra situationen – ikke fra læreren.

5. Det skal i situationen være muligt at gentage forsøg mange gange, der skal være plads til "trial and error".

6. Den viden, som læreren ønsker, at eleven skal tilegne sig, må fremtræde som en forudsætning for at komme fra den oprindelige strategi til den nye. I eksemplet med tallerkener og gafler blev eleven tvunget til at tælle og kommunikere om tal for at løse opgaven. (José ***, 2006)

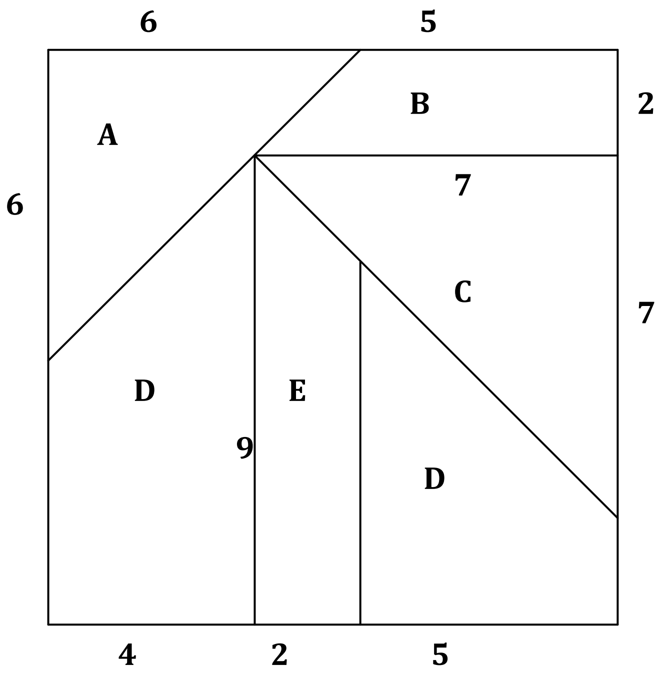
PUSLESPILLET, ET BERØMT EKSEMPEL PÅ EN FUNDAMENTAL SITUATION

Vi vil herefter se på et i Frankrig meget udbredt eksempel på en fundamental didaktisk situation, hvor hensigten er, at eleven skal lære proportionalitetstolkningen af brøker og knyttet hertil forstørrelse og målestoksforhold[6]. Situationen ville også være velegnet til mellemtrinnet i en dansk skole. Vi gennemgår forløbet trin for trin.

Læreren forbereder et antal puslespil (se figur 3) samt en forstørret udgave af samme puslespil, som placeres på tavlen.

[6] I den oprindelige planlægning af denne situation, formuleres det faglige mål som "kendskab til den lineære forstørrelse 7/4" (Brousseau 1997, s. 165)

Figur 3



Kopieret efter Brousseau 1997, p. 177

Læreren siger til eleverne: “Her er et puslespil, I skal konstruere et helt magen til, men større. Det liniestykke, der her er 4 cm langt, skal i jeres puslespil være 7 cm langt.

Aktiviteten organiseres som gruppearbejde, hver gruppe består af 4 – 6 elever. Hver elev skal forstørre en eller to brikker, således at alle brikker bliver forstørret.

Før eleverne begynder at forstørre brikkerne, skal de i hver gruppe beslutte, hvordan de vil gøre.

Bemærk, at en forudsætning for, at forstørrelsen af puslespillet lykkes, er, at alle korresponderende vinkelstørrelser bevares og alle korresponderende linjestykker forstørres med samme faktor. Der er i opgaven indbygget en kontrol af, om det er lykkedes, idet brikkerne skal passe sammen og danne et puslespil i større format.

Durand-Guerrier (2003) beskriver herunder de strategier, som eleverne udvikler.

Strategi 1

Eleverne forsøger sig med at addere 3 cm til hvert linjestykke på puslespilsbrikkerne.

Resultat: Fx er en retvinklet trekant er ikke længere retvinklet osv. Når eleverne forsøger at samle puslespillet passer brikkerne ikke sammen.

Strategi 2

Eleverne adderer 3 cm til hvert linjestykke, som støder op til en ret vinkel.

Resultatet: I nogen grad har brikkerne bevaret den korrekte form. Den retvinklede trekant er stadig retvinklet, og den retvinklede trapez er stadig retvinklet. Men de rigtige proportioner er ikke bevaret. Når eleverne forsøger at samle puslespillet, opdager de, at brikkerne igen ikke passer sammen.

Strategi 3

Eleverne fordobler længden af hvert linjestykke, der støder op til en ret vinkel, og subtraherer 1 cm.

Resultat: Som ved strategi 2 har vi, at I nogen grad har brikkerne bevaret den korrekte form. Den retvinklede trekant er stadig retvinklet, og den retvinklede trapez er stadig retvinklet. De rigtige proportioner er heller ikke denne gang ikke bevaret.

Hvis eleverne har været lidt unøjagtige med forstørrelsen, kan brikkerne næsten passe sammen, og de kan forledes til at tro, at de har foretaget en korrekt forstørrelse. I et sådant tilfælde må læreren intervenere og fx sige: "I dette puslespil har vi, at 2 + 5 korresponderer med 7", og måske tilføje: "Med denne strategi får vi i den nye figur, at 3 + 9 korresponderer med 13, så figuren bygget af C, D og E har ikke en ret vinkel."

Strategi 4

Eleverne adderer en halv længde af hvert linjestykke til de oprindelige linjestykker og hertil adderes en fjerdedel af det oprindelige linjestykkes længde.

Strategi 5

Eleverne fordobler længden af hvert linjestykke og subtraherer herefter en fjerdedel af længden af linjestykket.

Strategi 6

Eleverne multiplicerer hvert linjestykke med 1,75.

Brousseau har en malende beskrivelse af, hvordan eleverne efter de første forsøg diskuterer, beskylder hinanden for at have været unøjagtige, bliver arrige og græder. Men når eleverne først har accepteret, at der skal tænkes nyt, så går det ret hurtigt. Eventuelt får de hjælp på tavlen, hvor læreren skriver starten på tabellen for funktionen, $f(x) = 1{,}75 \cdot x$, der selvfølgelig kun findes i lærerens bevidsthed.

4 ----------------- 7

5 -----------------

6 -----------------

2 -----------------

9 -----------------

7 -----------------

Herefter finder eleverne først billedet af 8: for hvis 4 → 7 så 8 → 14. Men denne idé bliver ikke forfulgt, de får en ny idé. De bliver opmærksomme på, at de behøver et billede af 1, for, som de siger, så kan vi finde de øvrige. “Men så skal 4 deles op i 4 dele, og 7 skal deles op 4 dele”.

Eleverne ved tilstrækkeligt om brøker og proportionalitet til, at de direkte kan skrive:

4 · 1-billedet måler 7

1-billedet er derfor $\frac{7}{4}$

Eleverne gør det ikke spontant, men regner som følgende:

$$7 = \frac{70}{40} = \frac{280}{40} : 4 = \frac{70}{40} = \frac{35}{20} = \frac{175}{100} = 1{,}75$$

og så er $\frac{350}{100} : 2 = \frac{175}{100} = 1{,}75$

Brousseau skriver videre, at det er klart, at de kun kan foretage disse beregninger, fordi brøken $\frac{7}{4}$ er kendt. I øvrigt observerer Brousseau kun meget få bemærkninger om, at det er nødvendigt at få linjestykker, så f(a) + f(b) = f(c), fordi a + b = c. Forestillingen om en lineær forstørrelse, står altså kun svagt hos eleverne. Men eleverne opnår succes ved, at deres metode kan verificeres gennem præcise konstruktioner af brikkerne (Brousseau, 1997).

HVILKEN VIDEN FORVENTES ELEVERNE AT OPNÅ?

Multiplikation med hele tal er gentagen addition, men multiplikation med rationale tal kræver, at begrebet for multiplikation udvides. Dvs. at begrebet om multiplikation får ny ændret betydning.

Situationen med puslespillet er organiseret med den hensigt, at

- eleverne forsøger sig med irrelevante metoder
- give eleverne mulighed for selv at forkaste disse metoder
- få eleverne til at forsøge igen og finde på alternative metoder
- få eleverne til – i det mindste implicit – at opdage reglen: "Hvis a + b = c, så er f(a) + f(b) = f(c)".
- eleverne opdager proportionalitetstolkningen af brøker og knyttet hertil forstørrelse og målestoksforhold.

HVORFOR KAN DENNE SITUATION BESKRIVES A-DIDAKTISK?

1. Der er basale processer med hele tal, som eleverne er i stand til at udføre for at arbejde med opgaven. Dvs., at opgaven kan overdrager til eleverne, den har et indhold, der indebærer mulighed for, at eleverne udvikler ejerskab.
2. De anvendte strategier, som hver gruppe anvender, er blevet ekspliciteret mundtligt, før eleverne forstørrer brikkerne.
3. Der er indbygget mulighed for validering, idet eleverne kan kontrollere, om brikkerne passer sammen.
4. Det er muligt for læreren at forblive tavs om den viden, der er involveret, i løbet af elevernes arbejde.

Vi vil nu generalisere Durand-Guerrier's beskrivelse af forløbet med puslespillet til en vejledende plan for arbejdet med en situation.

Faser i en situation[7]

Devolution

Læreren indleder med kort at introducere problemstillingen/opgaven og overdrager den til eleverne, således at eleverne opnår ejerskab og ansvar for selv at arbejde med problemstillingen/opgaven. Eleverne kan spørge ind til problemstillingen/opgaven, så de er klar til at påtage sig udfordringen. Devolution er en betegnelse for hele denne proces, og udgør sammen med den sidste fase, institutionalisering, den væsentligste del af lærerens aktive indsats.

Handling

Her udtænker eleverne strategier eller sagt på en anden måde underviser sig selv i en metode til løsningen af problemstillingen. Læreren forholder sig observerende og involverer sig kun, hvis eleverne ikke kan magte udfordringen.

Formulering

Eleverne sætter ord på deres handlinger og forsøger at fremsætte hypoteser.

Validering

Eleven har fremsat en hypotese, som skal valideres, dvs., bevises eller måske godtgøres ved flere forsøg - eller måske afvises ved modeksempler. Læreren hjælper med afklaring efter behov.

Institutionalisering

Læreren præciserer den opnåede matematiske viden og gør klart for eleverne, hvad der har været i spil og sætter måske denne viden ind i en større sammenhæng.

[7] Efter den Brousseaus opdeling fra 1978 samt hans senere begreb ”institutionalisering” (1997, s.3- 18) og nye bearbejdelserne af José ***, 2006 og Winsløw, 2006, s. 138-139.

Winsløw har givet et godt overblik over samspillet i denne type undervisning, som vi gengiver herunder (Winsløw, 2006, s. 140):

	Lærerens rolle	**Elevernes rolle**	**Miljø****	**Situation**
Devolution*	Igangsætte Afklare	Modtage og forstå opgave	Etableres	Didaktisk
Handling	Observere Reflektere	Handle Reflektere	Problemfelt Udforskningsfelt	a-didaktisk
Formulering	Organisere Spørge	Formulere Præcisere	Åben diskussion	a-didaktisk eller didaktisk
Validering	Lytte Evaluere	Argumentere Reflektere	Styret diskussion, bedømmelse	Normalt didaktisk
Institutionalisering	Præsentere Forklare	Lytte Reflektere	Institutionel viden	Didaktisk

*José's opfattelse af lærerens rolle er, at efter **Devolution** skal læreren indtage en meget tilbagetrukket rolle indtil, man når trinnet **Institutionalisering.**

** "Det didaktiske miljø udgøres … af de omgivelser for elevens læring, som undervisningen stiller til rådighed – problemstillinger, opgaver, hjælpemidler mv." (Winsløw, 2006, s. 135)

AFRUNDING

Blandt seminariematematiklærere er det et velkendt problem, at mange matematikstuderende har et såkaldt traditionelt syn på, hvad matematik er, hvordan man underviser i matematik, og hvordan matematik læres, der groft sagt er karakteriseret ved, at matematik er noget en gang givet og indiskutabelt, at undervisning sker ved, at den velforberedte lærer gennemgår og forklarer, og at eleverne lærer ved at høre efter og ved efterfølgende at regne opgaver, der bygger på det gennemgåede stof. Dette traditionelle syn er ikke i overensstemmelse med det nuværende faghæfte for matematik i grundskolen – eller med nyere fagdidaktiske forskningsresultater. Fra forskningen ved vi også, at det er meget vanskeligt at ændre et syn, som det har taget mange år at udvikle, og som til en vis grad bygger på en forestilling eller tro, som kommer til udtryk i udtalelser som: “at sådan har man altid gjort, og jeg har da klaret mig godt i matematik – se nu kan jeg læse matematik på linje”.

Her står vi som matematiklærere på seminariet over for en udfordring. Vi ser imidlertid en mulighed for, at den del af teorien om didaktiske situationer, som vi her har præsenteret, kan medvirke til at få ekspliciteret de studerendes syn på matematik, undervisning og læring heraf. Brousseau bygger sin teori på et konstruktivistisk læringssyn, og den måde at tilrettelægge og gennemføre matematikundervisning på, som her er beskrevet, er meget forskellig fra den form, der bedrives i den traditionelle udgave. At blive præsenteret for denne arbejdsform og selv blive kastet ud i den vil uundgåeligt føre til sammenligninger og dermed diskussioner, der er en første forudsætning for ændring. I den a-didaktiske situation, som vi har beskrevet, overtager eleven/den studerende selv ansvaret, og da ansvarlighed netop er et af de problemer, som vi finder vanskeligt at få de studerende til at påtage sig, er det vores opfattelse, at vi her har i det mindste én måde at tackle dette problem på.

Desuden mener vi, at når kommende matematiklærere har stiftet bekendtskab med teorien om didaktiske situationer og selv prøver at arbejde i overensstemmelse hermed, vil der være stor sandsynlighed for, at de i deres kommende praksis henter inspiration i disse og bringer fornyelse ind i grundskolens matematikundervisning. De af læreren nøje tilrettelagte forløb kan meget vel tænkes at løse noget af det tidsproblem, som mange lærere føler er stort, idet det opleves vanskeligt at nå rundt og hjælpe alle. Læreren skal i den a-didaktiske situation trække sig tilbage og overlade scenen til eleverne, observere hvad der sker og først sætte ind, når behovet virkelig er der. Eleverne bliver på deres side tvunget ud i at tænke selv, og den ret udbredte tendens med at række hånden op og bede om hjælp, så snart en ny udfordring dukker op imødegås.

Vi slutter med et citat af Brousseau, der tydeligt understreger forskellen til traditionel undervisning: “The teacher must therefore simulate in her class a scientific microsociety if she wants the use of knowledge to be an economical way of asking good questions and settling disputes, and if she wants language to be a tool for mastering situations of formulation and mathematical proofs to be a means of convincing classmates.” (Brousseau, 1997, p. 23)

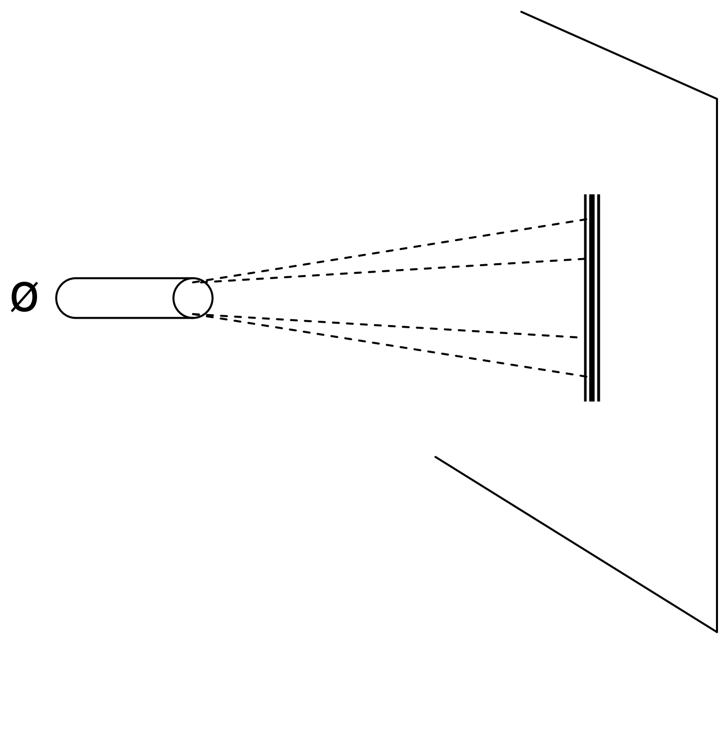
2: Kikkertforsøg. funktionel sammenhæng i 9. klasse

Introduktion

Udgangspunktet er, at vi mener at vi kan få en god didaktiske situation ud af følgende kikkertforsøg, som vi på forskellig vis analyserer og produktudvikler på de følgende sider.

Kikkertforsøg

Med henblik på at møde en praktisk situation, hvor der forekommer en funktionel sammenhæng, har vi valgt et forsøg med "kikkerter".



1) Placér en meterlineal på væggen og anvend paprullen fra en køkkenrulle som kikkert.

Forsøget går ud på at finde og beskrive en sammenhæng mellem:

- afstand fra kikkerten til væg (en person står et stykke fra væggen med en kikkert for øjet)

og

- den udstrækning af linealen, som personen kan se gennem kikkerten.

Find flere sammenhørende talpar og beskriv en sammenhæng.

2) Placér en meterlineal på væggen. En paprulle fra en køkkenrulle anvendes som kikkert, men da kikkerten skal kunne forlænges, anbringes en rulle af papir inde i køkkenrullen, således at den fylder køkkenrullen ud. Forsøg vha. tape at få papirsrullen til at have samme diameter overalt.

Forsøget går ud på at finde og beskrive en sammenhæng mellem:

- længden af kikkerten

og

- den udstrækning af linealen, som personen kan se gennem kikkerten.

Find sammenhørende talpar og beskriv en sammenhæng.

STRATEGI FOR UDVIKLINGSARBEJDET

Isabelle Bloch nævner fire faser i et sådant stykke udviklingsarbejde, didaktisk ingeniørkunst:

I. Apriory analysis: Til enhver del af viden er der en række situationer, der udløser og løses af denne viden. Analyse af den pågældende del af viden er et epistemologisk arbejde, der kan foregå centralt på et universitet eller et udviklingsinstitut.

II. Udformning af situationen. På lærerniveauet skal den eksperimentelle situation udformes – de didaktiske variable justeres. Der vælges et scenario.

III. Lærerens kendskab til de studerende indgår: Hvad ved de på forhånd, hvad vil resultatet af situationen blive? Hvad bliver den institutionaliserede viden.

IV. Realiteten, brugen i situationen i en faktisk klasse.

IA. APRIORI ANALYSE, FAGLIG OG HISTORISK.

Med henblik på at udvikle og forfine den didaktiske situation med kikkertforsøget, vil vi først foretage en faglig analyse. Eller sagt med sproget fra den franske didaktiske skole: Kikkertforsøget må stå som et slutresultat af en didaktisk transposition eller omdannelse fra videnskabsfag til klasseværelse. Altså hvilket fagligt stof, hvilke nøglebegreber eller kulturelt værktøj er det egentlig, der er det centrale i denne sammenhæng?

1. Funktionen som et sanset og oplevet fænomen, hvor en variabel opleves at afhænge af en anden.

Man kan påstå, at opmærksomhed mod og forståelse af funktionelle sammenhænge i natur og samfund er meget vigtigt mål i skolen, men det funktionsbegreb man skal kende er ikke nødvendigvis det fra videnskaben kendte, men en mere intuitiv fornemmelse af sammenhæng mellem to størrelser/variable. For nærmere at diskutere dette kan det være en hjælp at inddrage begrebsparret begrebsbillede og begrebsdefinition, jf. kassen herunder.

Concept image og concept definition

Vi benytter os ofte frit og frejdigt af begreber, der ikke er eksplicit defineret. Vi lærer at genkende dem gennem erfaring og brug i passende kontekster. Senere kan disse begreber præciseres og fortolkes med forøget skarphed med eller uden at blive behæftet med en præcis definition.

Tall og Vinner har kaldt de samlede forestillinger og medbetydninger, som for den enkelte indgår i et begreb, for *begrebsbilledet* (concept image). Begrebsbilledet inkluderer således alle de mentale billeder og associerede egenskaber og processer, der for den enkelte knytter sig til begrebet. Det bliver opbygget over lang tid gennem mange forskellige erfaringer og forandres, når individet møder nye stimuli og modnes. Som en del af begrebsbilledet kan der indgå en egentlig *begrebsdefinition* (concept definition). Tall og Vinner betragter begrebsdefinitionen som værende en sammenstilling af ord, der specificerer begrebet. Der kan være tale om en formel definition eller om en, som eleven selv har udviklet, evt. i samarbejde med andre i klassen. Den er måske 'lært' som udenadslære, men kan også være lært og tilegnet på en mere meningsfuld måde. Hvis der er tale om en definition, som eleven selv har udviklet kan den selvsagt afvige fra den formelle definition på begrebet. For den enkelte vil en begrebsdefinition generere 'et begrebsdefinitions-billede', som kan relatere sig til dele af begrebsbilledet (Tall og Vinner 2004, s. 99-100). Men der er ikke fuldstændigt sammenfald mellem et begrebs definition og de mentale billeder, der bringes i spil, når der arbejdes med begrebet. En definition giver heller ikke i sig selv nogen sikkerhed for, at eleven danner begrebsbilleder, det støtter forståelsen af begrebet.

Den videnskabelige definition på en funktion har i det sidste århundrede længe været:

"y en funktion af x, hvis der til enhver værdi af x svarer netop én værdi af y".

Endnu i starten af 1900-tallet sagde man dog (også i gymnasiebøgerne): *"y en funktion af x, hvis der til enhver værdi af x svarer en eller flere værdier af y"*, hvilket havde muliggjort, at cirklen kunne betragtes som en funktion.

Det, vi kan lære af denne stump historie, er, at det åbenbart ikke så meget har været det med *"netop én"* der er det centrale ved funktionsbegrebet historisk set.

Vi kan også se, at man i den grad langt op i 1900-tallet har været fuldstændig afhængig af at nævne den ene variable *y*, for at give funktionen et symbolsk navn. Fx da man i 1940 endelig fik indført funktionsbegrebet på nogle seminarier, skønt det ikke var krævet i den samtidige, nye bekendtgørelse. Selve definitionen lød i Albert Kristensens i 1940 reviderede udgave af "Lærebog i Aritmetik og Algebra for Seminarier":

> *En Størrelse y er en Funktion af den variable Størrelse x, hvis der til enhver af visse angivne x-Værdier svarer én bestemt Værdi af y. x og y kaldes for henholdsvis den uafhængige og den afhængige Variable.*

Tredive år senere står vi midt i den "ny matematik" og definitionen i seminariebøgerne er nu:

"*Ved en funktion forstås en mængde af ordnede par, blandt hvilke der ikke findes forskellige ordnede par, som har samme førstekomponent*". (Kyed 1969, s. 41)[8]. Denne mængde ordnede par kunne fx kaldes f, og "hvis (x,y) er med i f, vil vi skrive $y = f(x)$". Så her fik funktionen symbolnavnet f, og funktionen blev frigjort fra den variable y. Dette var sket flere årtier tidligere i den videnskabelige matematik og gymnasiematematikkens differential- og integralregning.

Hermed havde man fået et meget omfattende, men også et meget abstrakt og statisk funktionsbegreb, der helt havde forladt forestillingen om en sammenhæng mellem to variable, en påvirkning fra den ene til den anden, en forestilling om noget der "svinger sammen".

Ser vi på en moderne og rimeligt korrekt definition fra en skolebog, kan vi tage den fra Matematrix 8:

> *En funktion er en sammenhæng mellem to variable størrelser. Den ene kaldes den uafhængige variabel x, den anden kaldes den afhængige variabel f(x).*

Her bibeholdes lidt af det intuitive indhold med ordet "sammenhæng", og det (måske tvivlsomme) at den afhængige variabel hedder $f(x)$, flytter fokus fra y til f, når vi skal tale om funktionen.

I alle tilfælde konkluderer denne historiske gennemgang og faglige analyse, at det for almindelige skoleelever må være vigtigt at fastholde det intuitive indhold af funktionen som sammenhængen mellem to ting/variable, så situationen skulle gerne lægge fokus der.

---

[8] Da mange moderne læsere vil have svært ved at tolke Kyeds definition, ser vi lige på et eksempel, hvor den betragtede mængde af ordnede par er $f = \{(1,2); (2,4); (3,6); (4,8); \dots \text{ osv.}\}$. Hvis vi vil fortolke denne mængde af ordnede par som en funktion i samme forstand som hos Kristensen fra 1940, så skal vi tolke alle talparrene som (x,y) og bemærke, at det særlige er, at y er det dobbelte af x. Der er altså blot tale om funktionen $y = 2x$ med definitionsmængde i de naturlige tal. Generelt er en funktion f altså en mængde af ordnede par. Hvis (x,y) er med i f vil vi skrive $y = f(x)$, skriver Kyed i overensstemmelse med dette moderne funktionsbegreb.

2. To meget vigtige funktionelle sammenhænge er direkte og omvendt proportionalitet

Kikkertforsøget lægger specielt op til de to traditionelt vigtigste funktionelle sammenhæng, nemlig den direkte og omvendte proportionalitet. At disse typer har været traditionelt vigtige ses af , at proportion (= forhold) er et gammelt europæisk ord. I forbindelse med skoleloven af 1814 nævnes disse to funktionelle sammenhænge, men i en helt anden sprogdragt i forbindelse med faget regning, der for første gang blev obligatorisk for alle. Som en naturlig konsekvens måtte lærerne være regnekyndige, jf. § 47 i loven:

> "Enhver, som attraaer at beskikkes til Skolelærer paa Landet, men dog ikke har nydt Undervisning ved noget af Os allernaadigst auctoriseret Skolelærer-Seminarium,bør i det mindste… forstaae at regne de 4 Specier (regningsarter) og regula de tri".

Regula de tri , Regula de tribus (reglen om de tre) er reglen om, hvorledes opgaver af følgende generelle type løses "Hvis *a* enheder koster *c* kroner, hvad koster da *b* enheder af samme produkt?" Det havde allerede da været vigtigt stof i regnebøgerne i et par hundrede år. Reglen giver svaret: $\frac{c}{a} \cdot b$. Altså: find først (ved division) ud af, hvad 1 enhed koster og gang derefter op til det ønskede antal enheder.

Konkret optrådte dette som: *Totalpris = stykpris · antal*

At der her i gammelt sprog er tale om direkte og omvendt proportionalitet ses, hvis man vælger

1) ved fast stykpris (2 kr.) at se på, hvordan totalprisen (*y*) afhænger af antallet (*x*): $y = 2x$, den direkte proportionalitet

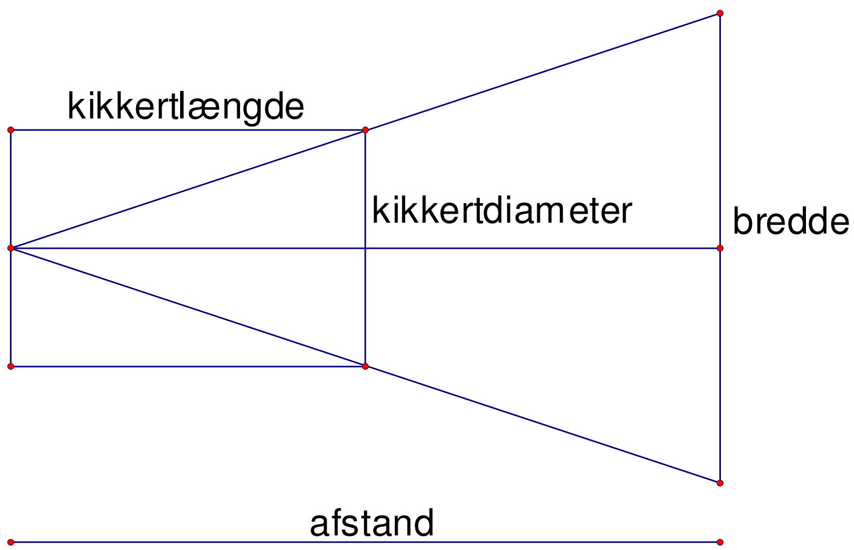
eller

2) ved fast totalpris (1000 kr.) ser på, hvordan det mulige antal (*y*) afhænger af stykprisen (*x*): $y = \frac{1000}{x}$, den omvendte proportionalitet.

Det nye med funktionsbegrebets ankomst var først og fremmest, at man tænkte mere på de variable og deres sammenhæng end på den statiske formel: *Totalpris* = *stykpris* · *antal*.

Denne fokus på variable og deres sammenhæng synes at kunne styrkes med kikkertforsøget, men netop de historiske eksempler ovenfor minder os om, at der findes nogle traditionelle handelseksempler, som den moderne elev også kender fra mange års matematikundervisning, så måske er det vigtigt under "institutionaliseringen" at knytte denne sammenhæng.

Hvis vi lægger os fast på, at det netop er disse funktioner, vi er interesserede i, skal vi sørge for, at det også er, hvad eleverne får ud af eksperimentet. Det betyder, at vi skal sørge for at måle afstanden til synsfeltet/væggen helt henne fra øjet og ikke fra enden af kikkerten, hvilket fremgår af følgende geometriske gennemregning.



Hvis det benyttes, at den lille og den store trekant er ensvinklede og dermed ligedannede, fås:

$$\frac{bredde}{kikdiameter} = \frac{afstand}{kiklængde}$$

Ved en almindelig køkkenruller får man kikdiameter = 4,5 cm og kiklængde = 23 cm, og derfor

$$bredde = \frac{4,5}{23} \cdot afstand \Leftrightarrow$$
$$bredde = 0,2 \cdot afstand \Leftrightarrow$$
$$y = 0,2 \cdot x \text{ ved passende valg af } x \text{ og } y.$$

Hvis vi derimod fastholder afstanden til fx 4½ meter eller 450 cm, kunne vi være interesseret i sammenhængen mellem bredde og kikkertlængde og den generelle formel bliver i dette tilfælde

$$\frac{bredde}{4,5} = \frac{400}{kiklængde} \Leftrightarrow$$
$$bredde = \frac{1800}{kiklængde} \Leftrightarrow$$
$$y = \frac{1800}{x} \text{ (ved passende valg af x og y)}$$

IB. Apriori analyse: Er kikkertforsøget en fundamental situation?

Set med den franske didaktiske skoles øjne må det næste spørgsmål, vi stiller os, være, om kikkertforsøget kan siges at være en fundamental situation for de mulige faglige udbytter, vi så ovenfor.

1. Funktionen som et sanset og oplevet fænomen, hvor en variabel opleves at afhænge af en anden.

2. To meget vigtige funktionelle sammenhænge er direkte og omvendt proportionalitet.

Her er der ikke tvivl om, at forsøget har at gøre med disse to punkter. Men spørgsmålet, vi stiller, er, om der kan siges at være tale om en “fundamental” situation, der jf. Winsløw s. 144 karakteriseres som:

> En fundamental situation for en given faglig viden er altså en adidaktiske situation som – når eleven vinder spillet i det didaktiske miljø – fører til en personlig viden, der kan fællesgøres som den tilsigtede faglige viden. Med andre ord: En situation er fundamental for en tilsigtet viden, hvis denne viden er en afgørende vinderstrategi i situationen.

Hvordan kan vi da i kikkertforsøget få dette frem. Der skal for det første være en mulighed for at vinde, og forståelse af direkte eller omvendt proportionalitet skal føre til en vinderstrategi. Endelig skal eleven selv kunne afgøre, om de har vundet i denne adidaktiske fase.

Det kan gøres ved, at eleven udforsker og beskriver en funktionel sammenhæng i et givet interval, givet ved paprøret og ved de mulige afstande til væggen, der kan være blokeret af borde undervejs i sigtelinjen. Efterfølgende stilles så spørgsmål om, hvordan funktionsværdien vil være i et punkt uden for dette interval:

Hvor meget tror du, at du kunne se, hvis røret var 10 cm langt, og du stod i en afstand af 3 meter? Hvis kikkerten bestod af to 20 cm lange rør, der kunne forskydes i hinanden, og der var blokerende borde i afstanden 3 meter, ville det kræve en forståelse af såvel 1) som 2) at løse problemet.

Med hensyn til at eleverne skal få feedback fra deres selvstændige arbejde med situationen på, om de havde løst opgaven, så kunne det ske ved, at de fik mulighed for at fjerne forhindringerne, altså skære et rør ned til 10 cm og fjerne bordet i afstanden 3 meter.

Der synes altså en mulighed for at gøre kikkertforsøget til en fundamental situation.

II. UDFORMNING AF SITUATIONEN.

Vi prøver at udforme situationen, idet vi på forhånd tænker på de forskellige faser i ifølge Brousseau.

Devolution

Den skriftlige opgave, som vil bestå af Kikkertforsøget (s. 2) i tilpasset udgave, udleveres til eleverne.

1. Der kan fremhæves, at opgaven støtter nogle af de mål klassen skal nå efter 9. klasse ifølge Fælles Mål. Nogle valgt blandt de følgende, tilpasses i formulering og fortælles eleverne:

fra Tal og algebra

- undersøge og beskrive "forandringer"…
- kende funktionsbegrebet
- forstå og anvende udtryk, hvori der indgår variable
- bestemme løsninger til ligninger… med grafiske metoder

fra Matematik i anvendelse

- arbejde med og undersøge matematiske modeller, hvori formler og funktioner indgår
- anvende matematik som værktøj til løsning af praktiske og teoretiske problemer på en alsidig måde

Kommunikation og problemløsning

- benytte eksperimenterende og undersøgende arbejdsformer og formulere resultatet af den faglige indsigt, der er opnået
- veksle mellem praktiske og teoretiske overvejelser ved løsningen af matematiske problemer
- benytte geometrisk tegning til at formulere hypoteser og gennemføre ræsonnementer

2. undersøgelsen/opgaven præsenteres kort mundtlig: Lidt om hvordan man ser i kikkerten og formålet med at finde sammenhænge:

Generelle sammenhænge:

"I skal prøve at finde sammenhænge mellem de forskellige ting, der kan måles i dette eksperiment: længden af kikkerten, afstanden hen til væggen og størrelsen af synsfeltet på væggen".

Konkrete gæt (måske skal dette komme ind på et senere tidspunkt):

"I skal gætte jer til, hvor meget af væggen man kan se, hvis man står med kikkerten inde i det forbudte område, fx i 3 meters afstand. Hvis I bruge noget af det, I ved om sammenhænge, kan I gætte ret præcist"

Det er meget vigtigt, at eleverne i denne fase kommer til at opleve et ejerskab til situationen.

Handling

Eleverne læser nu på egen hånd det udleverede og går i gang med undersøgelsen.

Det er afgørende, at instruktionen er klar nok til, at de kan arbejde uden lærer et godt stykke tid (adidaktisk). Det kan være et problem her, at der efter oplægget skal være et felt, som de ikke kan komme ind i i første omgang, for hvordan vil det virke, når læreren har overdraget opgaven til eleverne?

Måske vil det være en god idé, at lade feltet, som de ikke må gå ind i i første omgang være angivet ved kridt eller et langt reb på gulvet: forbudt område.

Formulering

Her skal eleverne i bedste fald

1) nå frem til en beskrivelse af sammenhængene i kvalitative termer og i en mere præcis kvantitativ udgave enten grafisk i form af et plot af punkter i et koordinatsystem eller et eller et mere formelagtigt udtryk.

2) nogle kvalificerede gæt på undersøgelsens punkt: "konkrete gæt".

Validering

Det heldige her er, at situationen i en vis grad er fundamental, så eleverne kan validere deres gæt ved i denne fase at gå ind i det "forbudte område", så en del af valideringen kan foregå i en adidaktiske fase. Men her vil læreren ellers glide ind i diskussionen igen. Dette gælder specielt, når det kommer til de "generelle sammenhænge", hvor der søges generelle funktionsudtryk for de to sammenhænge i opgaven.

[Overvej eventuelt om hver af de to sammenhænge tages for sig, så den ene gøres færdig frem til institutionalisering, mens eleverne i den anden går tilbage til yderligere handling og formulering, før den valideres]

INSTITUTIONALISERING

Man kan forestille sig følgende typer institutionaliseringer af viden fra situationen:

- de tal, I har målt, på kaldes variable, fordi vi har været interesseret i, hvordan de varierer.

- I har set, at der i dette eksperiment har været nogle sammenhænge mellem variable. Sådanne sammenhænge kaldes i matematikken for “funktioner”.

- vi har nået frem til nogle konkrete funktioner, nemlig fx: $y = 0,2 \cdot x$, som vi sommetider kalder den rette linjes ligning, men man bruger også udtrykket en ligefrem proportionalitet.
- Man kan kort sige, at *x* og *y* er ligefremt proportionale, hvis fx en fordobling af *x* giver en fordobling af *y*; og $y = \frac{1800}{x}$, der kaldes en omvendt proportionalitet. Man kan kort sige, at *x* og *y* er omvendt proportionale, hvis en fordobling af *x* giver en halvering af *y*. Eller helt groft: jo større *x* jo mindre *y*.

Konkret udformning af teksten til eleverne

Her er teksten som den var udformet til første afprøvning. Den er ikke indsat da den i sin form under punkt III ligner meget, men er noget forbedret.

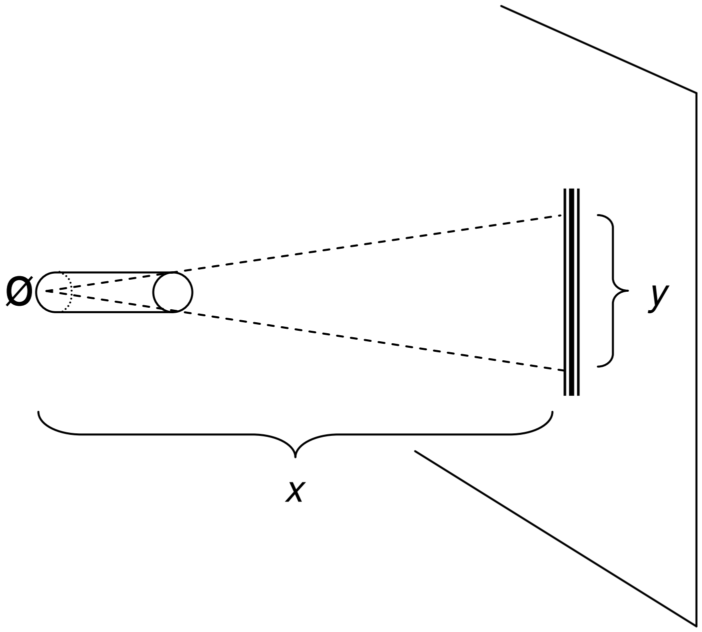
III. LÆRERENS KENDSKAB TIL DE STUDERENDE INDREGNES

Her er teksten som den var udformet til første afprøvning:

KIKKERTFORSØG I 9. KLASSE, ELEVMATERIALE 1

I skal lave forsøg med en meget simpel "kikkert", nemlig et rør, som I holder op mod det ene øje. Gennem kikkerten ser I på en væg. Hvis I prøver at gå lidt frem og tilbage, vil I opdage, at I sommetider kan se mere væg og sommetider mindre. I skal udforske, hvordan afstanden til væggen hænger sammen med, hvor meget I kan se.

Men I kan ikke udforske den helt frit, for I kan ikke frit vælge afstanden til væggen, da der ligger et "minefelt" foran væggen, startende ved ca. 2 meter fra væggen.



Placér en meterlineal på væggen og anvend paprullen fra en køkkenrulle som kikkert.

Forsøget går altså ud på at finde og beskrive en sammenhæng mellem:

- Afstand fra øjet til væggen. Vi kan kalde denne størrelse for x.
- Synsfeltets størrelse, dvs. hvor meget af linealen, som øjet kan se gennem kikkerten. Vi kan kalde denne størrelse for y.

1) Før I går i gang med selve eksperimentet, skal alle i gruppen lige prøve at lave en måling fra akkurat samme sted.

- Er I enige om målene på x og y?
- Hvis der er forskelle, diskuter så i gruppen, hvordan det kan være, og hvad I skal gøre for, at jeres mål i forsøget bliver nøjagtige.

2) Før I går i gang med selve eksperimentet, skal I bruge fantasien og hovedet til at besvare følgende spørgsmål:

- Hvor skal man stå, hvis synsfeltet skal blive lille?
- Hvor skal man stå, hvis synsfeltet skal være så stort som muligt?

3) Herefter kan I gå i gang med selve eksperimentet.

- Mål synsfeltet ved mindst fire forskellige afstande.
- Skriv resultaterne ned som sammenhørende talpar (x,y)
- Prøv at beskrive en sammenhæng mellem x og y.

4) På grund af minefeltet kan I ikke komme til at lave forsøg, hvor I står tæt på væggen, men I kan i stedet bruge beskrivelsen i 3) til at undersøge det.

- Brug jeres beskrivelse til at give et bud på, hvor stort synsfeltet er i afstanden 1 meter.
- Kan I ud fra jeres beskrivelse bestemme størrelsen af synsfeltet, hvis I fx står 100 meter fra væggen (og vi forestiller os, at væggen er meget stor)?

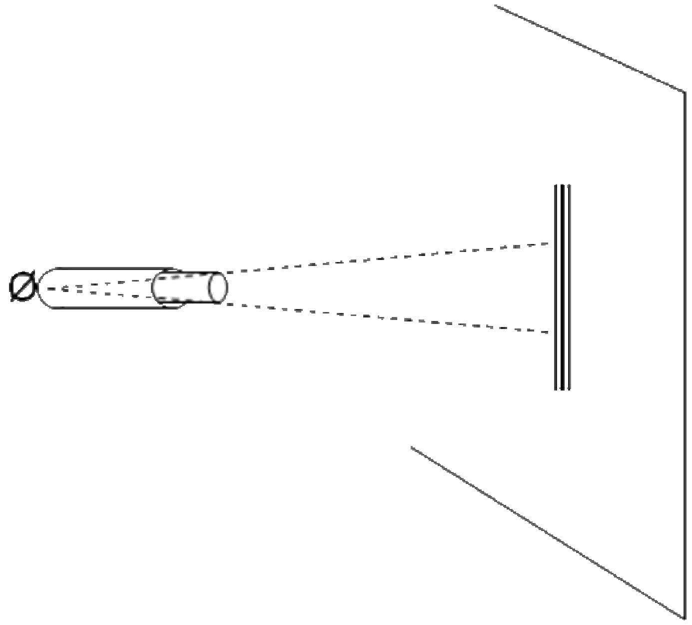
5) Forbered jer på at forklare resultatet af jeres arbejde for en anden gruppe. Når en anden gruppe er klar til det, udveksler I erfaringer.

KIKKERTFORSØG I 9. KLASSE, ELEVMATERIALE 2

I skal igen foretage et eksperiment med en "kikkert", et rør, som I holder op mod det ene øje. Gennem kikkerten ser I på en væg. Denne gang skal I hele tiden blive stående på det samme sted; fx med 4 meter fra øjet til væggen. Til gengæld kan kikkerten nu trækkes ud, så den bliver længere, ligesom en gammeldags "sørøver-kikkert". Hvis I prøver at trække lidt frem og tilbage i kikkerten, vil I opdage, at størrelsen af synsfeltet på væggen varierer (brug samme lineal som før). Det er denne sammenhæng, I nu skal udforske.

Kikkerten laves ved at rulle et stykke papir, så det kan sættes ind i køkkenrullerøret. Ved hjælp af lidt tape sikres, at dette indre rør holder en fast diameter og sidder tæt i røret, men alligevel kan skubbes frem og tilbage. Hvis kikkerten skal gøres endnu længere skal der sættes flere rør ind.

Den faste afstand holdes fx ved at tegne en kridtstreg på gulvet. Stå på kridtstregen, så øjet er lodret over (afstand til væg fx 4 meter).



1) Prøv før selve forsøget, om I alle i gruppen får samme størrelse synsfelt, hvis I står i samme afstand til væggen og sørger for, at kikkerten har samme længde hver gang.

2) Før I går i gang med selve eksperimentet, skal I bruge fantasien og hovedet til at besvare følgende spørgsmål:

- Hvor lang skal kikkerten være, hvis synsfeltet skal blive lille som muligt?
- Og hvis synsfeltet skal være så stort som muligt

3) I skal nu prøve at beskrive sammenhængen mellem:

- Længden af kikkerten. Vi kan kalde denne størrelse for x.
- Synsfeltets størrelse. Det vil sige det stykke af linealen, som øjet kan se gennem kikkerten. Vi kan kalde denne størrelse for y.

Find (som i Elevmateriale 1) en del sammenhørende talpar.

I det første eksperiment var der et minefelt, som I ikke kunne komme ind i, så I fik brug for fantasi og beregning. I dette eksperiment er der ikke minefelter, men I kan alligevel få brug for fantasi og beregning for at besvare:

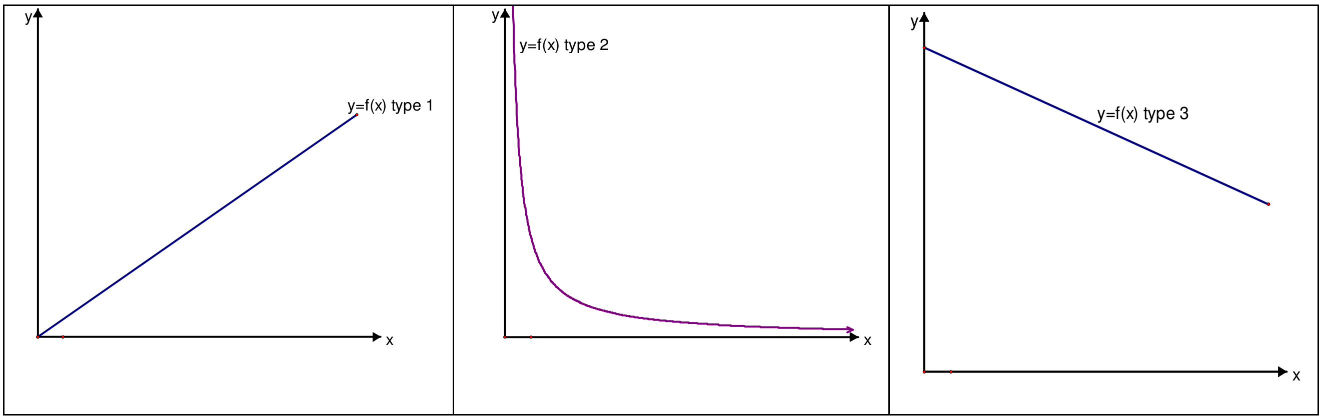
- Hvor stor bliver synsfeltet, hvis kikkerten er 4 meter lang?

- Hvor stor bliver synsfeltet, hvis kikkerten er 2 meter lang?

- Hvor stor bliver synsfeltet, hvis kikkerten er 10 cm lang?

Tegn og/eller beskriv en sammenhæng, der gælder for alle kikkertlængder.

5) Hvis I sætter jeres sammenhørende talpar ind i et koordinatsystem, hvilken af nedenstående typer funktioner (grafer) passer tallene i dette eksperiment så bedst med?



IV. Realiteten, brugen i situationen i en faktisk klasse.

Her er nogle af vore observationer fra mandag og tirsdag 23-24 februar, 2009 af kikkertforsøg i 9. Klasse. Vi benyttede materialerne beskrevet ovenfor.

Observation af kikkert mandag d, 23. feb. 2009 kl. 10 – 11.30 på Egebjergskolen

Tilstede: 9 klasse, deres matematiklærer Mette og en dansklærer, samt observatørerne Simon og HCH.

Sessionen er overvåget af to videokameraer (et omvandrende med Simon og et fast) samt tre båndoptagere (hos hhv. gruppe 1 og gruppe 5 og gruppe 6)

Dette her er blot HC's notater under og lige efter timerne, samt lidt udskrift fra gruppe 1. Det vil blive uddybet med flere udskrifter og optagelser.

Grupper er navngivet således efter placering i rummet

1 2 HC

3

4 5 6

Elevmateriale 1, observationer knyttet til enkelte spørgsmål

1) Før I går i gang med selve eksperimentet, skal alle i gruppen lige prøve at lave en måling fra akkurat samme sted.

- Er I enige om målene på *x* og *y*?
- Hvis der er forskelle, diskuter så i gruppen, hvordan det kan være, og hvad I skal gøre for, at jeres mål i forsøget bliver nøjagtige.

De vælger generelt at måle fra fx 10 cm til 55 og siger 45 cm eller fra 20 til 80 og siger 60 cm.

Denne gruppe ser fra toppen: "Jeg kan se til 42. Jeg kan se til 41. 40". Et par grupper måler fra 0 cm.

2) Før I går i gang med selve eksperimentet, skal I bruge fantasien og hovedet til at besvare følgende spørgsmål:

- Hvor skal man stå, hvis synsfeltet skal blive lille?
- Hvor skal man stå, hvis synsfeltet skal være så stort som muligt?

Gruppe 2: *Straks efter gennemlæsning. "Jo længere vi er væk jo større bliver feltet. Jo tættere vi er på jo mindre bliver feltet." kl. 10.30: Gruppen taber koncentration. Lyshåret pige siger: det ligger alt sammen omkring at det går 5 gange ind i".*

3) Herefter kan I gå i gang med selve eksperimentet.

- *Gruppe 3 og 4 laver systematisk sildeben per meter. kl. 10.20 siger de i gruppe 4: Når man går 1 meter ud bliver det 20 cm større o.s.v., hvilket er dokumenteret på det nedskrevne. Det observeres dog at 1 meters afstand er medtaget og at de i det hele taget har bevæget sig meget i minefeltet. Jeg foreholder dem dette og de svarer: jamen det har vi beregnet:"i 2 meters afstand var det 40 så vi tager bare det halve". En anden svarer: det er bare vores kontrolmål: så han er helt med på hvad ideen var med minefeltet.*
-

4) På grund af minefeltet kan I ikke komme til at lave forsøg, hvor I står tæt på væggen, men I kan i stedet bruge beskrivelsen i 3) til at undersøge det.

- Brug jeres beskrivelse til at give et bud på, hvor stort synsfeltet er i afstanden 1 meter.
- Kan I ud fra jeres beskrivelse bestemme størrelsen af synsfeltet, hvis I fx står 100 meter fra væggen (og vi forestiller os, at væggen er meget stor)?

Det virker godt nok med minefeltet, men faktisk har de mange gange brug for at gå tæt på vægges for at måle afstanden til væggen. Men det fungerer godt hvor det betyder noget, netop her i 4)

5) Forbered jer på at forklare resultatet af jeres arbejde for en anden gruppe. Når en anden gruppe er klar til det, udveksler I erfaringer.

Gruppe 3 og 6 ville også gerne have udleveret en opgave mere, men vi mente at det var for meget med kikkert 2, I stedet fik de som gruppe 1 opgaven med dobbelt diameter og diameter lig med 1 cm. Deres spontane svar var mere eller mindre korrekte, men de nåede ikke at indtegne kurver, da timen så var slut

***Efterbearbejdning**:*

Simon var bekymret i starten, at alle ret hurtigt fandt en formel før de havde nået så meget andet. Men der viste sig at blive spørgsmål og problemer.

Gruppe 5: Fik i starten pæne målinger. Men så blev de usikre: "Mette vi vil lave et meget større koordinatsystem", og så kom punkerne til at se meget værre ud, da måleunøjagtigheden slog mere igennem.

Der skal være ekstra materiale der kun relaterer til forsøg 1, hvis Kikkert 1, skal kunne dække aktivitet i en dobbelttime.

Husk efter tirsdagens undervisning hos Mette at medtage paprør til Tine og dobbeltklæbende tape. NB brug kun et par millimeter tape, da det klæber enormt godt og er svært at få af væggen bagefter.

De enkelte grupper: direkte observation + gruppens afleverede papirer:

Gruppe 1

Efter at have gjort nogle målinger (x,y) findes følgende dialog på båndoptager:

Når x er lig med to meter… Det vil sige x lig 22,5.

K: Nu skal vi lige prøve at tjekke med 1 meter. Nå nej, det må vi ikke [på grund af minefeltet]

A: Nej med så med 4 meter. Der skal den være 90-.

K: Så skal vi lige have et målebånd.

…et minut utydeligt.

A: Så er den 90. Så passer det.

A: 22½ centimeter eller hvad?

B: Så skulle det have været 70..eller 77½- Kunne det godt have været det?

J: Jeg er også rigtig dårlig til at ramme de der tal.

A: Ja nøjagtigt. Kunne det godt have været det?

…..

K: Det vil sige at hvis vi var 10 meter væk så kunne vi se 225 cm.

…. vi laver lige en kontroltest på 10 meter,

…… 2 minutter

A: Hvad var den på 10.

Katrine: ca 2 meter, så det passer meget godt nu. Jeg tror godt Julie kunne have set lidt forkert.

A: ha..ha

…

Alt dette er lavet før de i det hele taget har læst spørgsmålene. Man kan sige at lige så snart at de de så hvad det var der hed x og y gik de i gang med en procedure med at finde talpar og finde kurver, uden at være bedt om det.]

Dialog om hældningskoefficient

K: Skal vi lave sildeben?

……

B: Skal det være 0,45 x, eller skal det være?

A: Når du går 45 op går du 2 ud.

Når du går en op så går du 22 ud, så er hældningstallet 22

B: Det vil sige at når vi går én ud så går du 22 cm op.

A: 22,5 eller 0,22

A: Men passer det.

K: Vi kan jo prøve

22,5x … plus .. plus 0

k.prøv lige at lave sildeben

Det var jo egentlig meget let….3 minutter…. Jeg forstår ikke rigtig hvad vi nu skal…. Vi skal diskutere med en anden gruppe. Er der nogen der er klar . nej det er der ikke…

K: matematik er hyggeligt

A: Vi er færdige

K: Nej vi skal forberede vores tale.

A: Nej vi er færdige!

[Forespurgt om aktivitet af lærer]…..

A: Så fandt vi hurtig ud af at det var en konstant funktion, en lineær funktion

C: Derfor to vi så en måling ved 10 meter for at være sikre på at den var konstant

C.Og lavede et flot sildeben til. Og besvarede spørgsmålene og synes det hele var rigtigt nemt... Og fandt ud af at vores diameter var 5 cm. I forhold til nogle af de andre der var lidt større eller mindre og fik et andet resultat end vi andre

HC: I tænker at det også har noget med diameteren at gøre?

K: Ja det har det helt klart.

K…Det har også noget at gøre med længden.. Er den 22½?

A: Den er 23.

K: Vi kan sagtens klare alt matematikken, men at måle et paprør. Det er fame for svært!

K: Vi har målt røret til 22,5 er det er det bare et sjovt tilfælde

Læreren: Men jeg vil gerne have jer til at hvis diameteren på det rør var 10.

K: Hvordan kan vi ændre den eller skal vi bare tænke os til det?

A:Hvis du ser på det her stykke, så er det 1 cm og så har vi 2 og så kan man sjovt nok se dobbelt så meget.

D: Hallo prøv at tag et til rør og så læg det oven på hinanden

A: I forlængelse

B: Nej

….. til 1 cm det burde så være 22,5 divideret med 5…(det ringer ud)

***Fortsat dialog om hvorfor diameter 10 cm giver dobbelt synsfelt af 5 cm**.*

A:Det svarer til at hvis du lægger to gange 1 sammen

C: Det er lige som de tegninger du har lavet her [peger på tegningen i kikkert 1].

HC: fordi du synes at.-- Hvordan giver to kikkerter det dobbelte…

C: Det var fordi vi målte op til hvor den var 10 cm…og så ud fra vores observation så blev det også det dobbelt.

D: Nu er den mere præcis den her.

Noter taget om gruppe 1 undervejs og lige efter undervisningen.

Gruppe 1 er hurtig, allerede ved spørgsmål 2 siger de: "Hvad hvis det skal være lille? Så skal man vel tæt på ifølge vores graf".(En af drengene har allerede tegnet en retlinet graf. Eksempel på at opgaven skrider meget hurtigere frem end vi havde planlagt. Jeg spørger hvordan de fik den tegning frem. De svarer: Vi har målt i 2,3 og 4og 120 meter og fandt ud af at det voksede med 22,5 centimeter r per meter, derfor måtte det være sådan en linje.

I deres papirer har de skrevet over deres sildeben skrevet y = 22,5x + 0. Under sildeben skriver de "dvs. hver gang x stiger med 1 stiger y med 22,5". De kan så konkludere for beregning der skal foregå i det ikke tilgængelige minefelt. "1 meters afstand = 22,5 cm af linealen".

Gruppe 1 er færdig med kikkert1 omkring kl. 10.30. De viser formel, sildeben og kurve og siger

" det er så hvad vi får med en diameter på 5 cm". En hurtig konsultation med Mette og vi beslutter at hun nu stiller opgave: Hvad hvis diameteren er 10 cm? Den hurtige dreng svarer strakt: "så bliver alt dobbelt", men den øvrige gruppe er straks mere bekymret for, hvor de finder en kikkert med 10 cm i diameter, så de kan lave forsøget.

Vi er allerede i gang med at finde kikkerter med andre diametre, men efter 2 minutter har de sat to kikkerter oven på hinanden som i i 8-tal. de måler sig herefter til: sammenhængen hvor den nye rette linje ligger med dobbelt y-værdi.(dette er dokumenteret på videoen)

Jeg spørger om de kunne tænke sig til at det skulle være dobbelt. De refererer til tegningen øverst på siden og sætter to y-er ovenpå hinanden på skærmen/væggen. Og det viser sig da også at når de skalk tegne kurven så bruger de beregnede tal frem for observerede.

Det er klart at de nu også har løst dette problem, så jeg stiller spørgsmålet: Hvad hvis I har en helt smal kikkert med diameter 1 cm, men det har de allerede udregnet. De har generaliseret princippet om at når dobbelt diameter giver dobbelt synsfelt så må en femtedel diameter giver en femtedel *synsfelt, så de har altså en meget god fornemmelse af direkte proportionalitet eller måske nærmere forholdsregning.*

Notaterne på deres papir om dette er:

2m	*90*	*d 10 cm*
2m	*45*	*d 5 cm*
2m	*9*	*d 1 cm*
1m	*4,5*	*d 1 cm*

Vi beslutter derfor kl. 10.55 at de skal i gang med kikkert 2. De arbejdede med dette frem til 11.15t. Gruppe 1 lod sig til allersidst påvirke af deres teoretiske overbevisning om at kikkertforsøg 2 skulle give en aftagende ret linje. De skal i morgen udfordres med spørgsmål der får kurven i retning af en hyperbel/omvendt proportionalitet.

Vi skal tænke på yderligere differentiering til denne gruppe i morgen. HC sørger for flere opgaver af typen tre af størrelserne: diameter, afstand, kikkertlængde og synsfelt er givet find den fjerde. De skal laves i en trinvis sekvens, hvor de første er det de allerede selv har lave allerede til det helt generelle.

Gruppe 6

Var en gruppe der godt selv var klar over at de savnede piger i gruppen til at hold arbejdet målrettet.

OBSERVATION AF KIKKERT TIRSDAG D, 24. FEBR 2009 KL. 8 – 10.30 PÅ EGEBJERGSKOLEN

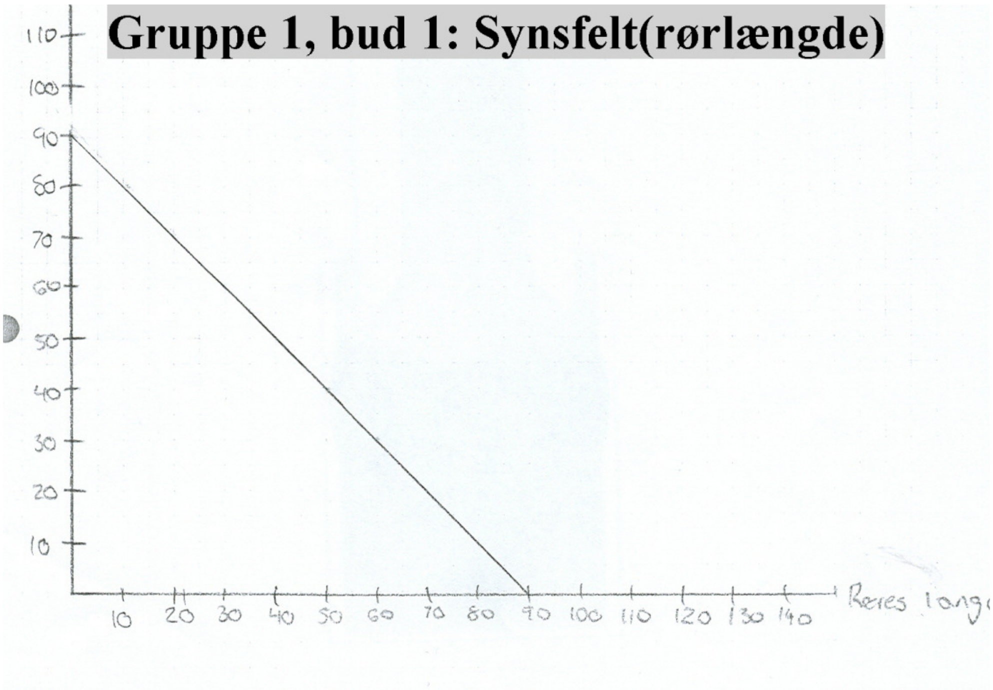
Tilstede: 9 klasse , deres matematiklærer Mette, samt observatørerne Simon, Kristine og HC.

Sessionen er overvåget af to videokameraer (et omvandrende med Simon og et fast ved gruppe 1) samt to båndoptagere (hos hhv. gruppe 1 og gruppe 5)

Dette her er blot HC's notater under og lige efter timerne. Det vil blive uddybet med udskrifter og optagelser.

Gruppe 1:

siger straks kl. 8.10 tirsdag som er starten på anden dobbelt lektion med kikkertforsøg: "Vi vil gerne se nærmere på kurven fra i går for den kan ikke passe: " Det drejer sig om følgende graf:



De tager en kontrolmåling på 4 meters afstand med en kort kikkert og finder ud af, at punktet ligger højere end på deres faldende rette linje der skærer x- aksen.

K: ”Den må gå sådan” [og tegner en hyperbelagtig krumning i første kvadrant]

Vi valgte at dokumentere gruppe 1’s arbejde totalt med video. Til sidst fremlagde holdet kort arbejdsproces og konklusion for HC. Dette er også dokumenteret og deres materialer og deres formelsamling som indtog en central plads er vist op for kamera. De fandt y=2000/x, svarende meget godt til den y=1800/x, som vi på forhånd havde fundet med hjemlig køkkenrulle. De var meget opmærksomme på målenøjagtighed, men mente faktisk, at deres formel var eksakt, fordi flere produkter xy havde givet netop 2000.

HC gav dem den sidste opgave i det supplerende materiale for at give en kraftig udfordring. Nåede ikke at se resultatet men det må fremgå af det sidste på bånd.

Gruppe 3 (observationer skrevet ned i løbet af timen)

Havde tidligt i timen fået observeret fire punkter som godt kunne svarer til en faldende linje (svarende til gruppe 1 ovenfor, men dog således at linjen ikke havde krydset x-aksen på det tegnede udsnit, altså kort x-akse). Pigen synes dog, at der er et punkt tæt på y-aksen, der ikke passer ind i det. En af drengene A holder fast i, at det må være en ret linje og tvinger data i et silde ben til at leve op til det. Det er som om han tidligt har tegnet linjen og med vilje afsætter punkterne i den.

Nu får de den ide at forlænge kikkerten med endnu et stykke A.4, for at se om det passer for en lang kikkert. Målingen er dog ikke så afvigende, at de forkaster A's teori, og det er ham der fører ordet det meste af tiden. Han kan endda få data til at passe perfekt med den rette linje han har tegnet ved at han ændrer værdierne på x-aksen (han opgiver altså ideen med at der findes en fast enhed på x-aksen men lader den være variabel). Han er eksemplarisk i rollen som en der fastholder en teori og tvinger data til at passe med den – eller man kan sige at han assimilerer alle nye data i den foretrukne model.

En times diskussion og målinger hengår og forestillingen om en ret linje opgives endelig til sidst. Dette var ikke sket uden, at HC stillede spørgsmålet: Hvad hvis kikkerten kun havde været 3 cm lang?. Dette fremkaldte dog ikke i første omgang den nødvendige tvivl, idet den kun blev behandlet teoretisk uden reference til måling eller sund fornuft. Spørgsmålet blev i første omgang klaret med den givne teori (assimilering). Derfor fulgtes der op med spørgsmålet: Hvad hvis kikkerten havde været 2 meter lang? Fulgt op af Simons spørgsmål: Og hvad hvis den var fire meter lang [hvorved kikkertens "objektiv" netop ville komme til at røre ved væggen og synsfeltet derfor på forhånd kunne fastsættes til 5 cm]. Nu blev det problematisk at linje allerede ved en længde på 1 meter ville krydse x-aksen og synsfeltet antage negative værdier.

Den rette linjes forkæmper fastholdt dog teorien et stykke tid endnu[, selvom HC var morsom og sagde at med det synsfelt ville man være noget snævertsynet]. Men efter at de fire meter havde vist sig også at give et synsfelt af positiv udstrækning, blev det endelig nødvendigt at akkommodere – også for ham - men gruppen nåede ikke at forbinde målpunkterne med nogen kendt kurvetype.

Konklusion på gruppe 3

Vi skal nok have inkluderet disse provokerende kikkertlængder i det skriftlige materiale for at sikre os en længere adidaktisk fase. Desuden ville det i den givne gruppesammenhæng have været nyttigt at en stillle pige, der allerede tidligt havde tegnet en række punkter der lå ret markant i hyperbelform havde haft lejlighed til at sige noget mere. Så hvis man undervejs kan sikre at hver deltager faktisk skal komme med delkonklusioner ville arbejdet måske tidligere være kommet i en akkommodativ fase.

Det var lidt forbavsende, at kun to grupper nåede en smule i gang med det supplerende materiale, idet denne omvendte proportionalitet var meget udfordrende. Faktisk har klassen haft om ligefrem og omvendt proportionalitet i 7. klasse i Matematrix, så der har været forbilleder at se på. Men de to grupper der nåede frem til en bud på en formel, gjorde det dog via formelsamling: En mulig opdagelses vej kan være: En pige i gruppe 1 havde allerede dagen før set i materialet kikkert 2 og set de tre kurver nederst på anden side, hvoraf den ene var en parabelbue y=1/x. Da hun så i dag så at deres observerede kurve krummede, kom hun til at tænke på denne krumme kurve og mente at den fandtes i formelsamlingen, hvor der ganske rigtigt er et billede af en sådan kurve. Hun så først på y = 1/x, men fandt så at der på siden før var angivet y = a/x. Derefter fandt gruppen i fællesskab ud af at a kunne bestemmes som x gange y.

I gruppe 5 havde de også observeret at punkterne lå på en krummet kurve, men de var tomme for ideer. En pige fra gruppen havde så gået rundt til andre grupper og havde i gruppe 1 set at de havde fundet en kurve der lignede i formelsamlingen. Derefter udviklede denne gruppe et svar ud fra formelsamling.

INSTITUTIONALISERING.

Kristines notater over Mettes sidste 10-15 minutters institutionalisering:

Vi fandt sammenhængen sådan: Vi varierede afstanden (x) og så på linealen (y). Punkterne (x,y) blev indsat i et koordinatsystem og en kurve blev tegnet..

I går fandt vi f(x) = 0 (Elev: ”plus b”. Mette : ” Nej b = 0”) kalder vi det en ligefrem proportionalitet.

Vi kunne vælge afstanden frit, så den kalder vi en uafhængig variabel , mens synsfeltet bliver den afhængige variabel.

I dag fik vi med få punkter en kurve der lignede en faldende ret linje, men nej. Når der kom flere punkter med, og tegnede kurven, så vi at den krummede. Der er tale om en omvendt proportionalitet

Udtrykket for den sammenhæng er f(x) =…

Elev: Nej y =

Mette: OK, y = a/x , faktisk y = 2000/x

Hvad var her den afhængige og den uafhængige variabel. x = kikkertlængde, y = størrelse af synsfelt.

Bemærk at x skal være forskellig fra 0 her, men x kan gå mod 0.

Det karakteristisk ved den omvendte proportionalitet er at når x fordobles, halveres y.

Ved den direkte proportionalitet gav en fordobling af x også en fordobling af y.

V: FORBEDRET UDGAVE AF SITUATIONEN AFPRØVES I EN NY KLASSE

Som konklusion af første forsøg blev materialet ændret især i kikkert 1, hvor følgende blev tilføjet for at give tilstrækkeligt med udfordringer der styrkede opfattelsen af direkte proportionalitet:

citat begynd

6) Nu skal I prøve at undersøge en anden sammenhæng. Synsfeltets størrelse afhænger også af diameteren af kikkerten. Hvordan ville jeres hidtidige resultater ændre sig, hvis fx kikkerten havde den dobbelte diameter? Eller hvis den havde en diameter på 1 cm?

7) Vi vil godt finde en generel formel for, hvordan synsfeltet afhænger af kikkertens diameter. For at undersøge dette holder vi afstanden konstant på fx 4 meter.

Find en sammenhæng mellem

- Diameteren af kikkerten. Vi kan kalde denne størrelse for *x*.
- Synsfeltets størrelse, dvs. hvor meget af linealen, som øjet kan se gennem kikkerten. Vi kan kalde denne størrelse for *y*.

citat slut

og i kikkert 2, hvor vi alligevel blev nødt til at stille nogle udfordrende spørgsmål. Der blev inkorporeret for at forlænge den adidaktiske fase:

citat begynd

3) I skal nu prøve at beskrive sammenhængen mellem:

- Længden af kikkerten. Vi kan kalde denne størrelse for *x*.

- Synsfeltets størrelse. Det vil sige det stykke af linealen, som øjet kan se gennem kikkerten. Vi kan kalde denne størrelse for *y*.

Find (som i Elevmateriale 1) en del sammenhørende talpar.

I det første eksperiment var der et minefelt, som I ikke kunne komme ind i, så I fik brug for fantasi og beregning. I dette eksperiment er der ikke minefelter, men I kan alligevel få brug for fantasi og beregning for at besvare:

- Hvor stor bliver synsfeltet, hvis kikkerten er 4 meter lang?

- Hvor stor bliver synsfeltet, hvis kikkerten er 2 meter lang?

- Hvor stor bliver synsfeltet, hvis kikkerten er 10 cm lang?

citat slut

På tidspunktet for midtvejsevalueringen er resultatet af anden afprøvning endnu ikke klar men ligger i bånd. Umiddelbart er indtrykket at klasse nr. 2 ikke have så meget forudviden om netop feltet funktion, lineær sammenhæng, rette linjes ligning, direkte og omvendt proportionalitet som klasse 1. Derfor kom de ikke så langt i materialet. Men deres lærer Tine syntes at det måske var et meget godt tidspunkt at have disse situationer på, da det er et godt afsæt for det videre arbejde.

3: Didaktiske situationer omkring logistisk vækst

Udgangssituationen: Logistisk vækst – ikke helt nemt

I første halvdel af 1800-tallet arbejdede den belgiske matematiker P. F. Verhulst (1804-1849) med befolkningsudviklingen i USA. De tal, der var til rådighed, var fra folketællingerne i de første årtier efter unionens dannelse. De fremgår af tabel 1. På baggrund af tallene i tabellen forsøgte Verhulst at forudsige udviklingen i befolkningstallet frem til 1940[9].

Tabel 1

Årstal	Befolkning i mio.
1790	3,929
1800	5,308
1810	7,240
1820	9,638
1830	12,866
1840	17,069

[9] Oplysningerne her stammer fra *The Mathematical Association of America*: http://mathdl.maa.org/mathDL/4/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=484&bodyId=635 (lokaliseret februar 2008).

Vi har i Matematik for lærerstuderende Omega prøvet at tage udgangspunkt i dette materiale med afsnittet har klart nogle mangler. Først og fremmest kan de studerende ikke selv genopdage resultaterne og genopfinde logistisk vækst fordi det historiske materiale simpelt hen ikke passer så godt til logistisk vækst.

FAGLIG OG DIDAKTISK ANALYSE AF LOGISTISK VÆKST

Problemet med at se på den historiske oprindelse til den logistiske vækst, som i den citerede fremstilling af Verhulsts opdagelse, er at dette historiske materiale faktisk ikke på nogen umiddelbar måde lægger op til at man opfinder eller genopfinder den logistiske vækst. Måske havde Verhulst udviklet et stykke teori, før han begyndte at behandle materialet.

Der skal et grundigere historisk studium til at afgøre det med sikkerhed[10], men umiddelbart synes en mere didaktisk farbar vej at være at benytte konstrueret materiale, der lader eleven genopfinde den logistiske vækst.

A. Den metode der er mest tro mod den historisk-genetiske metode ville være at lave et fiktivt materiale, der passer til den logistiske vækst og hvor hovedtanken i det **adidaktiske forløb** består i

1) opdage og beskrive vækstfaktorens lineære aftagen

2) at benytte denne opdagelse til at lave en prognose for populationen, der fortsat respektere vækstfaktorens lineære aftagen.

B. Man burde dog også overveje den mere direkte teoretiske vej, hvor udgangspunktet er at eleven kender konstant vækst og vækst med konstant vækstfaktor og hvor følgende spørgsmål kunne

[10] Hvis vi får tid kunne det nok være en lærerig opgave at se nærmere på.

diskuteres og besvares i et måske knap så adidaktisk forløb: Hvordan kan vi nemmest tage højde for at væksten jo ikke kan blive ved i en endelig bæredygtig verden?

1. EN MULIG SITUATION FOR ARBEJDET MED LOGISTISK VÆKST

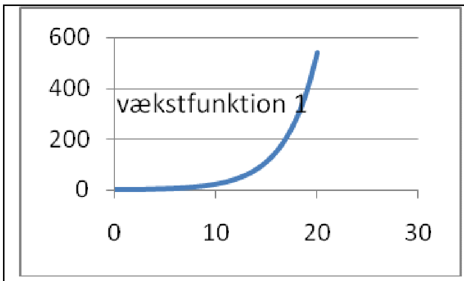
I denne beskrivelse holder vi os til et andetårshold på seminariet i specialiseringen matematik 4. – 10. klasse.

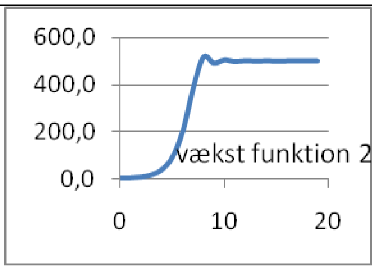
DEVOLUTION/ OVERDRAGELSE (OG FØRSTE AKTION)

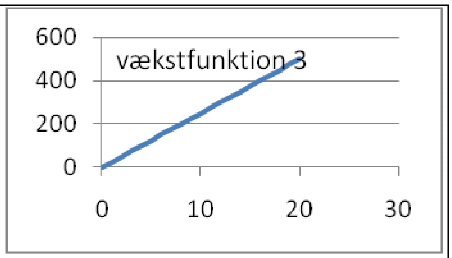
Læreren overgiver problemet til de studerende på følgende vis:

"Vi arbejde sidst med de to kendteste former for vækstfunktioner: lineær vækst og eksponentiel vækst. Hvis vi ser på udviklingen af populationer i naturen vil der kun i kortere perioder være tale om en af disse to vækstformer, fordi fødegrundlaget i naturen er endeligt. I skal i dette forløb opbygge mindst en ny form for matematisk vækstfunktion, der tager hensyn til denne endelighed".

1) *Hvilken af følgende tre grafer for vækstfunktioner for en population synes at tage hensyn til endeligheden af ressourcer, også hvis vi fortsætter funktionen fortsættes over større tidsrum*:







2) *Udpeg de tre tabeller der svarer til de tre grafer*:

0	1,0
1	2,5
2	6,2
3	15,4
4	37,9
5	90,4
6	201,5
7	382,0
8	517,2
9	490,5
10	504,5
11	497,7
12	501,1
13	499,4
14	500,3
15	499,9
16	500,1
17	500,0
18	500,0
19	500,0
20	500,0

Vækstfunktion nr. :

0	1
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	7
7	9
8	12
9	17
10	23
11	32
12	44
13	60
14	82
15	112
16	154
17	211
18	289
19	396
20	543

Vækstfunktion nr. :

0	0
1	25
2	50
3	75
4	100
5	125
6	150
7	175
8	200
9	225
10	250
11	275
12	300
13	325
14	350
15	375
16	400
17	425
18	450
19	475
20	500

Vækstfunktion nr. :

3) Hvis du bruger det vedheftede regneark, kan du arbejde videre på disse tre typer vækst. Du kan fx føje en ny kolonne til, så væksten frem til næste række (altså fra f(t) til f(t+1)) kan beregnes og skrives

ind i alle tre tabeller og også vækstfaktoren kan indskrives i en fjerde kolonne. Herved kan du genkalde de særlige karakteristika ved lineær og eksponentiel vækst. Den tredje vækstfunktion, der i større omfang tager højde for den bæredygtige vækst vil vi kalde en **logistisk vækstfunktion.**

Beskriv derefter i dine egne ord karakteristika ved de tre vaksttyper, og fokuser specielt på den nye vækstform logistisk vækst.

AKTION
Nå frem til en mere præcis beskrivelse af logistik vækst ved hjælp af observationer i regnearket (jf. herunder)

Den centrale undersøgelse i denne didaktiske situation går ud på at sammenligne den eksponentielle vækst med den logistiske. Den mest frugtbare vej i denne undersøgelse viser sig at være en sammenligning af vækstfaktorerne og betragte dem som funktioner af populationen:

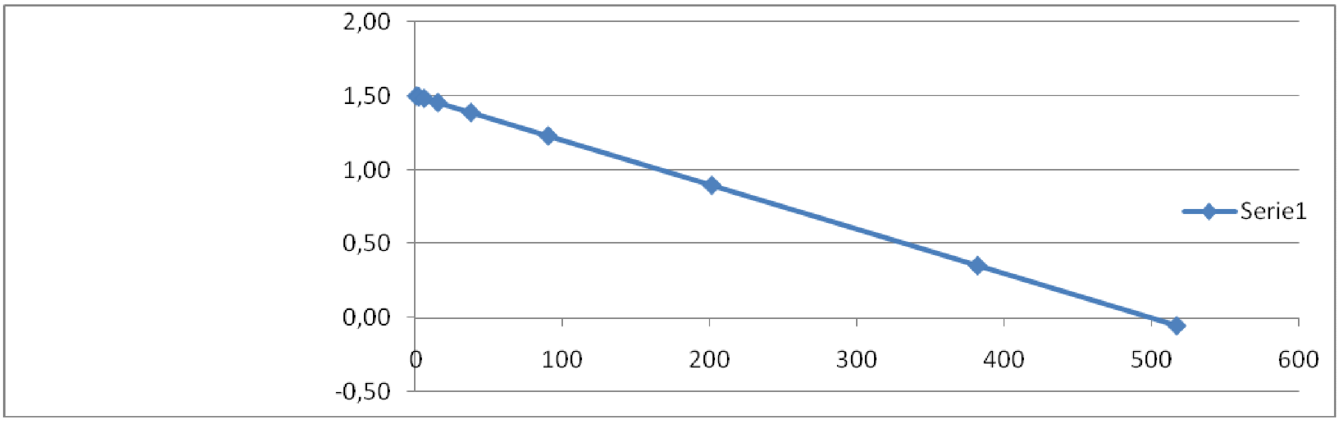
Eksponentiel vækst				Logistisk vækst			
tid, t	b(t)	vækst	vækstfaktor	t	b(t)	Vækst et trin frem	Relativ vækst
0	1	0,4	0,37	0	1,0	1,5	1,50
1	1	0,5	0,37	1	2,5	3,7	1,49
2	2	0,7	0,37	2	6,2	9,2	1,48

Her er vist hvorledes de to sidste kolonner kan indrettes:

	Vækst et trin frem	Relativ vækst
5	=C6-C5	=E5/C5
6	=C7-C6	=E6/C6
7	=C8-C7	=E7/C7

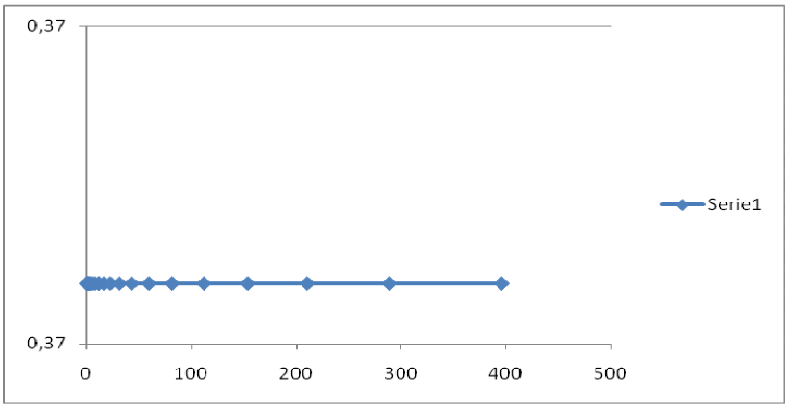
Den relative vækst kan opfattes som en funktion af tiden (t), men man kan i denne situation med fordel undersøge den som funktion af befolkningstallet. Begrund dette og tegn grafer af denne funktion i hver at de to tilfælde (enten ved manuel plotning eller ved fortsat brug af regneark).

[Det tilsigtede resultat i denne adidaktiske aktionsfase er at den studerende laver kurven der viser vækstfaktoren som funktion af populationsstørrelsen i et punktdiagram som dette:



Det antages at være iøjnefaldende at punkterne ligger på en faldende ret linje, hvilket gør det muligt at gå til formuleringsfasen.

Der spørges til en sammenligning med den tilsvarende kurve for eksponentiel vækst, der på ovennævnte talmateriale ser således ud:



Det antages at kravet om sammenligning dels støtter rent teknisk i at få den aftagende lineære vækstfaktor tegnet og dels støtter i formuleringsfasen, idet der skal puttes ord på forskellen mellem de to kurver

]

FORMULERING

”På baggrund og muligvis som del af, deres aktivitet i aktionsfasen forklarer eleverne hinanden, hvordan de har gjort. De sætter altså sætter ord på deres handlinger, og de forsøger at fremsætte hypoteser om resultater eller strategier. Brousseau nævner, at der er et sprogligt læringspotentiale for sprogligt svagere elever i at deltage i en sådan sammenhæng”. (Delta s. 436)

Formuleringsfasen kan i dette tilfælde fx styres adidaktisk ved følgende skrevne spørgsmål:

Prøv at samle op på undersøgelsen, og karakteriser på flere måder denne nye vækstform i sig selv og sammenlignet med andre vækstformer.

Dens vækstfaktor har flere egenskaber. Hvilken egenskab ved vækstfaktoren er det der sikrer "bæredygtig vækst", altså at populationen når et stabilt niveau?

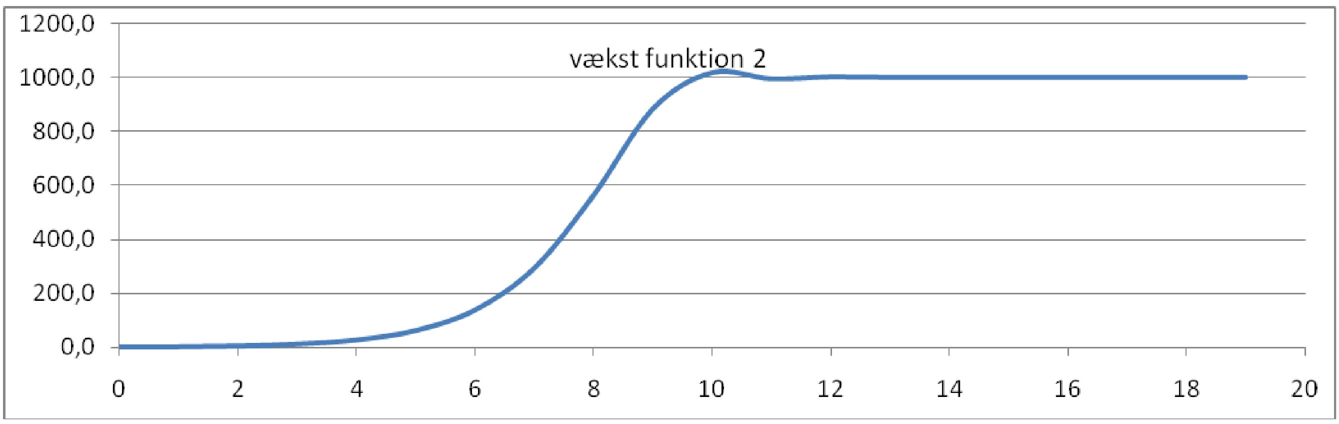
Det vil sikkert være naturligt at læreren indgår i formuleringsfasen efter at de studerende har været en tid i adidaktisk fase.

VALIDERING

"Elevernes hypoteser skal dernæst valideres, dvs. underbygges, bevises eller modbevises med argumenter og evt. med flere forsøg, eksempler elle modeksempler. Eleverne skal selv diskutere de fremsatte hypoteser, og læreren indtager en rolle som leder af en videnskabelig debat". (Delta s. 436)

1. Den mest elementære validering består i at opdage tilsvarende egenskaber ved et andet eksempel på logistisk vækst.

Undersøg denne vækst der også ligner en logistisk vækst:



fx ved at indsætte de tilhørende data i et regneark:

t	b(t)
0	1,0
1	2,3
2	5,3
3	12,1
4	27,7
5	62,6
6	138,9
7	294,4
8	564,5
9	884,1
10	1017,3
11	994,4
12	1001,6
13	999,5
14	1000,1
15	1000,0
16	1000,0
17	1000,0
18	1000,0
19	1000,0
20	1000,0

INSTITUTIONALISERING

Her drejer det sig som altid om at bygge bro mellem de studerendes vundne viden og den etablerede viden på området.

Den etablerede viden her er den logistiske vækst (diskret udgave) og i et vist omfang om evnen til at vælge den rigtige modelleringsfunktion ud af de tre: lineær, eksponentiel og logistisk vækst.

Denne viden er ikke rigtig etableret før den studerende også konstruktivt kan lave en logistisk vækst, men det må nok siges at tilhøre den næste situation i forløbet.

2. EN NY SITUATION MED KONSTRUKTION AF LOGISTISK VÆKST

Opgaven til den studerende er her: *Konstruer en funktion med logistisk vækst, idet du benytter den indsigt i logistisk vækst der blev fundet i den forrige situation.*

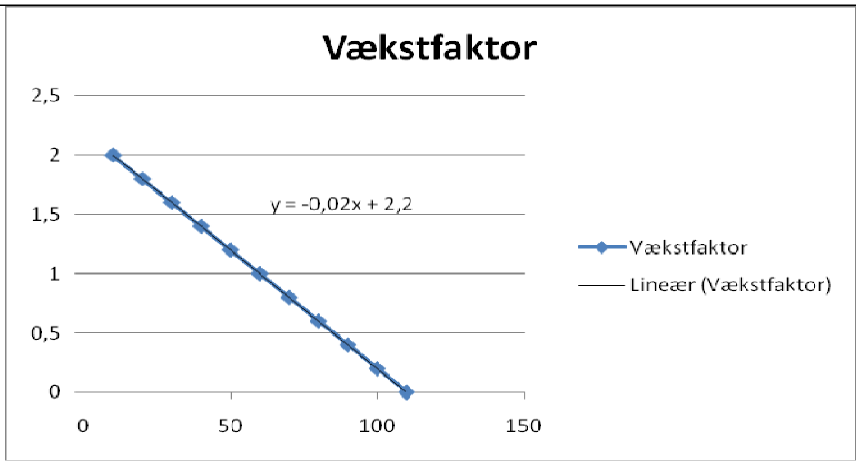
Tegn det grafiske billede af funktionen for at se om den svarer til billedet af en logistisk vækst.

DEVOLUTION

I den forrige situation kunne du finde og beskrive den vækstfunktion, der havde logistisk vækst. Prøv nu om du også selv kan lave funktionen, hvis du fx får oplyst hvordan vækstfaktoren ser ud som funktion af populationsstørrelsen.

Da vi tidligere fandt at vækstfaktoren i denne situation skulle være en aftagende lineær funktion, kan vi beslutte at den fx ser således ud:

Population(b)	Vækstfaktor
10	2
20	1,8
30	1,6
40	1,4
50	1,2
60	1



70	0,8	Formel: $vækstfaktor(b) = -0{,}02 \cdot b + 2{,}2$
80	0,6	
90	0,4	
100	0,2	
110	0	

AKTION

Prøv med en population der starter med b(0)=10 og beskriv hvordan den vokser for hver tidsenhed der går. Regn først med blyant og lommeregner før du går over til regneark:

tid / t	b(t)	Vækstfaktor (b)	Abs. Vækst
0	10	2	2*10
1	10+20=30	1,6	
2			
3			

FORMULERING

Forklar hvordan man laver en logistisk vækstfunktion

VALIDERING

1. Kunne du også have lavet en logistisk vækstfunktion der havde b(0) = 20.

2. Kunne du lave en logistisk vækstfunktion med b(0)=100 og maksimum på 300?

3. Kan der laves forskellige logistiske vækstfunktioner med b(0)=100 og maksimum på 300?

Institutionalisering

Vi laver en fælles præsentation til opslagstavlen om hvordan man laver en logistisk vækstfunktion.

3. EN TREDJE SITUATION: LOGISTISK TILPASNING TIL ET FORELAGT OBSERVATIONSMATERIALE

Det vil være naturligt at gå videre med at modellere et forelagt observationsmateriale

Fx undersøg om følgende talmateriale svarer til en logistisk vækstfunktion og prøv på det grundlag af fremskrive udviklingen:

Andelen af husstande i USA med videomaskine:

År	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
X	0	1	2	3	4	5	6
%	0,3	0,5	1,1	1,8	3,1	5,5	10,6
År	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
X	7	8	9	10	11	12	13
%	20,8	36,0	48,7	58,0	64	72	72

strategien vil naturligt være at tilpasse et af de tidligere eksempler på logistiskfunktion i et regneark til det givne observationsmateriale ved at ændre på de indgående parametre som b(0) og den relative vækstfunktion givet ved sine to parametre (skæring med 2.aksen og hældningskoefficient)

4. FØRSTE OBSERVATIONER AF VIRKNING

Simon er pt. ved at skrive observationsrapport fra to afprøvninger på Bornholm. Men han har allerede nogle hovedobservationer der betyder at situationen skal udvikles og præciseres.

1. Som den relative vækst udregnes på side 5 får man ganske rigtigt en ret linje ud af det. Men de studerende kan med lige så stor ret sætte denne relative vækst i næste række og dermed er det ikke indlysende at disse vækstrater ligger på en ret linje.

2. De studerende kunne ikke opfatte en rekursionsformel som en funktion og var derfor meget fokuseret på at finde en traditionel populationsfunktion f(n) = formel kun indeholdende n, hvilket er en opgave der i praksis er for krævende på dette og på mange andre højere niveauer.

BILAG

MØDE MED ISABELLE BLOCH, 12. DEC. 2008 PÅ KU.

Vi benytter i det følgende en opdeling fra Isabelles kursus i didaktiske situationer i 2001. Dette arbejde viser nemlig, at didaktiske situationer til en vis grad er overførbare mellem klasser og lande.

ARBEJDET I FORBINDELSE MED EN DIDAKTISK SITUATION BESTÅR IFØLGE ISABELLE I :

1. Apriory analysis: Til hvert stykke viden er der en række situationer, der udløser og løses af dette stykke viden. Dette er et stykke epistemologisk arbejde, der kan foregå central på et universitet eller udviklingsinstitut.

2. På lærerniveauet skal den eksperimentelle situation udformes – de didaktiske variable justeres. Der vælges et scenario

3. Lærerens kendskab til de studerende indregnes: Hvad ved de på forhånd, hvad vil resultatet af situationen blive? Hvad bliver den institutionaliserede viden?

4. Realiteten, brugen i situationen i en faktisk klasse.

Da realiteten i enhver klasse er unik vil denne sidste del ikke være reproducerbar, mens 1-3 sikkert er det i stort omfang.

Fordele ved brugen af didaktiske situationer ifølge Isabelle:

Velegnet til et hold af heterogene elever, pga. de didaktiske variable og de adidaktiske forløb, der frigør læreren i et vist omfang.

REFERENCER

Extrait d'Astolfi, J.-P., Darot, É, Ginsburger-Vogel, Y. et Toussaint, J. (1997): *Mots-clés de la didactique des sciences. Repères, définitions, bibliographies*, Bruxelles, De Boeck, pp. 61-65.

http://www.unige.ch/fapse/SSE/teaching/CD-contrats/contrat_coutume.rtf Lokaliseret den 7. maj 2006

Brousseau, G. (1999): Education and Didactique of Mathematics, Article for the Mexican Journal of Educational Science, p. 19. http://www.math.washington.edu/~warfield/Ed_and_Didact.html Lokaliseret den 6. maj 2006

Brousseau, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in mathematics*, Dordrecht: Kluwer.

Chamorro, Mª del Carmen (Coord.) (2003): Didáctica de las Matemáticas para Primaria. PEARSON EDUCACIÓN, Madrid.

Durand-Guerrier, V. (2003): Noter til forlæsning på DPU. Den 26. februar 2003

Marbán, José María (2006): Personlig kommunikation den 26. april 2006.

Winsløw, C. (2006): Teorien om didaktiske situationer. I *Didaktiske Elementer.* Forlaget Biofolia. s. 133-153.