www.navimat.dk

NA
VI
MAT
NATIONALT VIDENCENTER
FOR MATEMATIKDIDAKTIK

Didaktiske situationer

– Funktionelle sammenhænge i 9. klasse

Simon Cort Graae, Hans Christian Hansen & Kristine Jess

Læreruddannelsen Blaagaard/KDAS, Professionshøjskolen UCC

Eleverne arbejder koncentreret med deres opgave – i begyndelsen koncentrerer de sig mest om at svare på de spørgsmål, der er blevet stillet, men omsider sker det… en af eleverne står med et undrende blik og siger til resten af gruppen: "Hvad tror I der sker, hvis …".

I det følgende vil vi beskrive et resultatet af et udviklingsarbejde, der er gennemført med støtte fra NaViMat (Det Nationale Videncenter for Matematikdidaktik) i skoleåret 2008-09 Projektet er gennemført af Simon Cort Graae, H.C. Hansen og Kristine Jess, Professionshøjskolen UCC i et samarbejde med Mette Graae, Egebjergskolen, og Tine Juncker, Enghavegård skole.

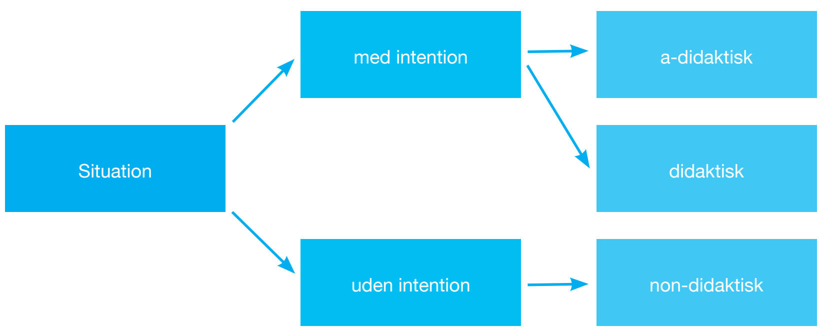
For at sætte projektet ind i en forståelsesramme vil vi indledningsvis kort redegøre for teorien om didaktiske situationer. Herefter beskriver og analyserer vi det undervisningsforløb, der blev gennemført på Egebjergskolen og Enghavegård skole. Formålet med hele vores projekt var at vurdere om dele af det omfattende franske udviklingsarbejde med tilhørende forskning med fordel kunne tilpasses til danske forhold.

Teorien om didaktiske situationer

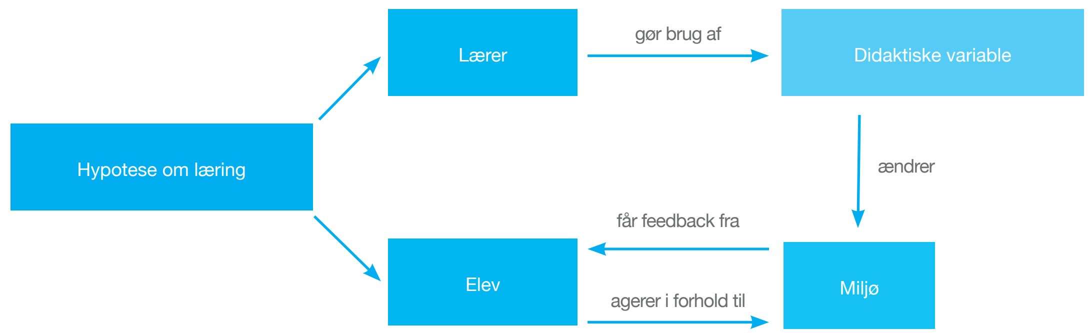
Det er den franske matematikdidaktiker, Guy Brousseau, der står bag udviklingen af teorien om didaktiske situationer (TDS). Brousseau er inspireret af konstruktivismen. Han havde tidligt fokus på undervisningsmaterialers udformning og kommunikationen i klassen, som i TDS har fået fællesbetegnelsen miljø. Brousseau påpeger det kunstige i, at læreren stiller spørgsmål, som han/hun godt selv kender svaret på. Uden for undervisnings-situationer stilles spørgsmål for at få et svar på noget, som man ikke ved. Dette paradoks stimulerede Brousseau til at udforme teorien om didaktiske situationer, der stærkt forenklet går ud på at udtænke en opgave, hvor eleverne bliver nødt til at lære sig det tilsigtede via arbejde med indholdet og uden at have ret me-get direkte kontakt med læreren. Udfordringen for eleverne skal bestå i at løse problemet og ikke i at tilfredsstille læreren. Vi vil nu uddybe Brousseau's lære.

Overordnet set sker læring i mange forskellige situationer, som kan forekomme både i og uden for undervisningen. Man ser fx, at børn kan lære sig noget uden for skolen, fx ved at lege/ekspe-rimentere, men det sker, uden at nogen – heller ikke børnene selv – nødvendigvis har haft en intension om, at læring skulle finde sted. Denne situation kalder Brousseau for non-didaktisk.

I skolens undervisning er der klart en intension om, at læring skal finde sted. Her opdeler Brousseau de tilrettelagte situationer i to forskellige typer: den didaktiske og den a-didaktiske. I den didaktiske del er læreren aktiv som underviser, i den a-didaktiske har eleven overtaget scenen og skal arbejde med den af læreren tilrettelagte opgave, fri af lærerens forklaringer og forventninger. Situationerne kan illustreres således:



Brousseau hævder, at den såkaldte traditionelle matematikundervis-ning bygger på en fejlagtig opfattelse af, at viden kan overføres og derfor ikke fører til, at eleverne lærer matematik, men snarere lærer at afkode bestemte forventninger hos læreren, og at eleverne dermed lærer sig en bestemt opfattelse af, hvad matematik er – eller går ud på. Brousseau tager afstand fra den traditionelle undervisningsform og mener, at den bør undgås i videst muligt omfang. Det er baggrunden for hans hypotese om læring, der bl.a. indebærer, at eleverne i en a-didaktisk situation arbejder med en nøje udtænkt (designet) opgave, som er en væsentlig del af det miljø der etableres i klassen. Et vellyk-ket forløb medfører, at eleverne tilegner sig den tilsigtede viden. Hele samspillet mellem elev – miljø – lærer i en a-didaktisk situation ses i modellen i figur 2[1].



I modellen indgår "didaktiske variable". En didaktisk variabel er en betegnelse for lærerens mulighed for at ændre opgaven, fx gøre den vanskeligere, således at eleverne tvinges til at skifte løsningsstrategi.
Af figuren fremgår, at undervisningen ikke skal foregå direkte mellem lærer og elever, men foregå gennem opgaven, der er nøje udtænkt ud fra en bestemt viden, som det er hensigten, eleverne skal tilegne sig. Hensigten er, at eleverne skal træde selvstæn-digt ind på banen; de skal ophøre med at fokusere på og gætte på, hvad lærerens forventninger er. Eleverne skal agere i forhold til opgaven. Den lærerløse tilstand, som eleverne hermed bliver bragt i, benævner Brousseau en a-didaktisk situation. Det kan undre, at lærerens nærvær søges undgået, for hvordan får elever-

[1]Inspiration til modellen Chamorro 2003, s.51

ne så korrigeret fejlagtige slutninger? Tanken er, at denne korrektion sker i forhold til opgaven, idet denne netop er konstrueret således, at der er indbygget feedback. Det kommer klarest frem i de såkaldte fundamentale situationer.

“En fundamental didaktisk situation for en bestemt viden er karakteriseret ved, at udnyttelsen af den pågældende viden er en vinderstrategi i den pågældende situation. Idéen er således, at eleven ved at engagere sig i en fundamental situation må udvikle den viden situationen er fundamental med hensyn til” (Skott m.fl., 2008, s. 429). En fundamental didaktisk situation er altså et forløb, der er designet med henblik på, at eleverne skal lære noget helt bestemt. For at den a-didaktiske del skal lykkes, må den designede fundamentale situation være opbygget, så der indgår didaktiske variable, der kan ændres i takt med elevens udvikling gennem arbejdet med den forelagte opgave. Desuden skal de følgende punkter tilstræbes opfyldt:

Ideelle krav til fundamentale didaktiske situationer

1. Eleverne skal have forkundskaber/forforståelse, så de kan forstå udfordringen og være i stand til at foreslå et svar.

2. Der skal være indbygget feedback, så eleverne kan validere deres strategi, uden at læreren behøver at gøre noget. Viser svaret sig at være utilstrækkeligt eller forkert, bliver eleven nødt til at finde en ny strategi for at klare udfordringen.

3. Der skal være indbygget usikkerhed, så eleverne ikke på forhånd kan afgøre, om en ny strategi, de skal afprøve, er OK.

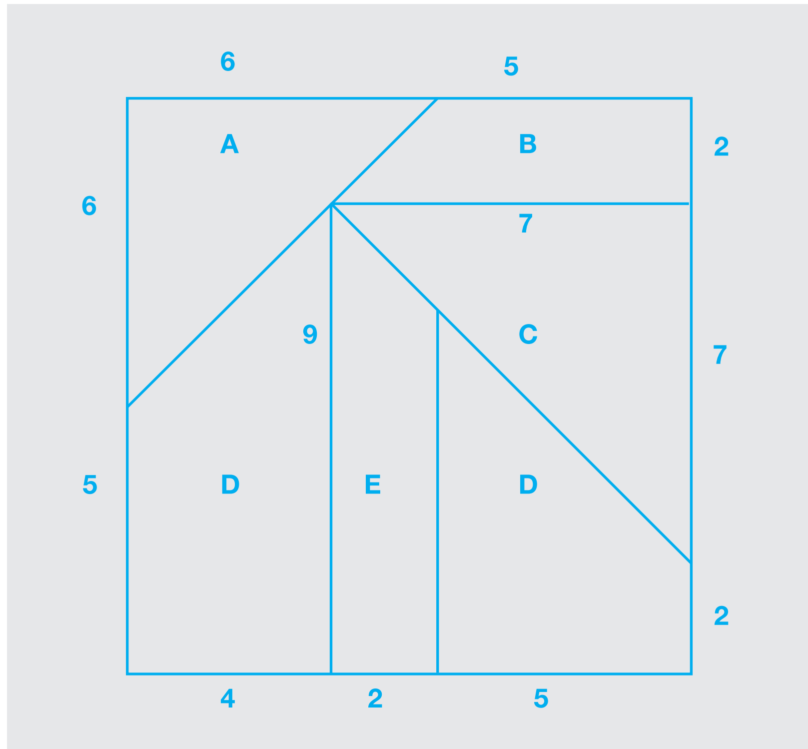
4. Det skal være muligt at gentage forsøg mange gange, der skal være plads til “trial and error”.

5. Den viden, som læreren ønsker, at eleven skal tilegne sig, må fremtræde som en forudsætning for at komme fra den oprindelige strategi til den nye.

Et eksempel på en didaktisk situation

Vi vil herefter se på en meget berømt puslespilsopgave, hvor hensigten er, at eleverne skal lære proportionalitetstolkningen af brøker og knyttet hertil forstørrelse og målestoksforhold[2]. Situationen kunne udspille sig i en 6. klasse. Vi gennemgår forløbet trin for trin.

Læreren forbereder et antal puslespil (se figur 3) samt en forstørret udgave af samme puslespil, som placeres på tavlen.



Figur 0:
Puslespil kopieret efter Brousseau 1997, p. 177

Læreren siger til eleverne: “Her er et puslespil, I skal konstruere det samme puslespil, men i en større udgave. Det linjestykke, der her er 4 cm langt, skal i jeres puslespil være 7 cm langt”.

Aktiviteten organiseres som gruppearbejde, hver gruppe består af 4 – 6 elever. Hver elev skal forstørre en eller to brikker, således at alle brikker bliver forstørret.

[2] I den oprindelige planlægning af denne situation, formuleres det faglige mål som “kendskab til den lineære forstørrelse 7/4” (Brousseau 1997, s. 165)

Før eleverne begynder at forstørre brikkerne, skal de i hver gruppe beslutte, hvordan de vil gøre. Bemærk, at forstørrelsen af puslespillet kun kan lykkes, hvis alle korresponderende vinkelstørrelser bevares og alle korresponderende linjestykker forstørres med samme faktor. Så derfor er der i opgaven indbygget en kontrol af, om læringen lykkedes, idet de forstørrede brikker kun kan passe sammen, hvis alle eleverne når frem til at beherske proportionalitet på dette niveau.

Opgaven kan søges løst ved en række strategier, fx ved at

1. addere 3 cm til hvert linjestykke på puslespilsbrikkerne.
2. addere 3 cm til hvert linjestykke, som støder op til en ret vinkel.
3. fordoble længden af hvert linjestykke, der støder op til en ret vinkel, og subtraherer 1 cm.
4. addere en halv længde af hvert linjestykke til de oprindelige linjestykker og hertil addere en fjerdedel af det oprindelige linjestykkes længde.
5. fordoble længden af hvert linjestykke og derefter subtrahere en fjerdedel af længden af linjestykket
6. multiplicere hvert linjestykke med 1,75

Det er klart, at den 6. strategi vil fungere. Da den 4. og 5. strategi er en anden måde at udtrykke det samme på, virker de også. Fælles for de tre første er, at puslespillet ikke vil kunne samles, hvis en af disse strategier anvendes. Dermed vil eleverne kunne indse, at metoden er forkert, og de må gøre et nyt forsøg.

Hvorfor kan denne situation beskrives a-didaktisk?

1. Den indeholder talbehandling, som eleverne har forudsætninger for at udføre. Opgaven indeholder udfordringer, der indebærer en mulighed for, at eleverne udvikler ejerskab.
2. Eleverne skal gruppevis diskutere sig frem til en strategi, før de forstørrer brikkerne.
3. Der er indbygget mulighed for validering, idet eleverne kan kontrollere, om brikkerne passer sammen.
4. Det er muligt for læreren at forblive tavs om den viden, der er involveret, i løbet af elevernes arbejde.

Winsløw (2006, s. 140) har i nedenstående skema leveret et godt overblik over de forskellige faser i et forløb som det med puslespillet (tilføjelserne i parentes er vores). Bemærk, at under Devolution er læreren helt fremtrædende og har ansvar for at overdrage opgaven til eleverne på en måde, der gør, at de fanges af problemet og forstår, hvad de skal. Under Handling skal eleverne arbejde uafhængigt af læreren, og det skal de også delvist under Formulering. Under Institutionalisering skal læreren sørge for at sætte ord på den faglige viden, der skulle opnås.

	Lærerens rolle		Miljø	Situation
Devolution (overdragelse af opgaven til eleverne)	Igangsætte Afklare	Modtage og forstå opgave	Etableres	Didaktisk
Handling (udtænkning og afprøvning af strategier)	Observere Reflektere	Handle Reflektere	Problemfelt Udforskningsfelt	A-didaktisk
Formulering (forklarer til andre grupper, fremsætter hypoteser)	Organisere Spørge	Formulere Præcisere	Åben diskussion	A-didaktisk eller didaktisk
Validering (forkaster/accepterer hypoteser)	Lytte Evaluere	Argumentere Reflektere	Styret diskussion, bedømmelse	Normalt didaktisk
Institutionalisering (præcisering af den opnåede matematiske viden)	Præsentere Forklare	Lytte Reflektere	Institutionel viden	Didaktisk

En situation om funktionelle sammenhænge i 9. klasse

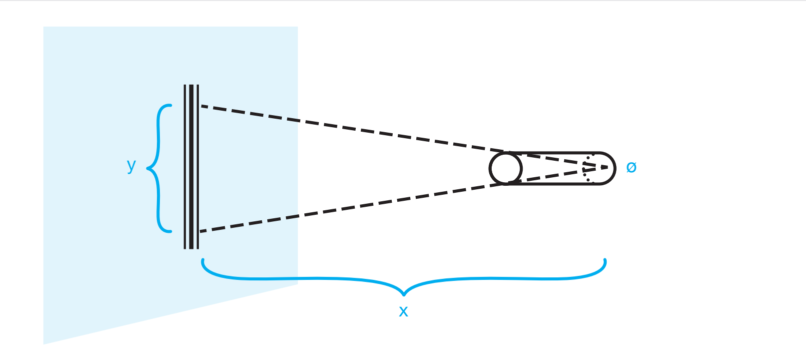
I det følgende beskriver og analyserer vi en didaktisk situation om funktioner i 9. klasse. Situationen er udviklet med udgangspunkt i et kikkertforsøg og er afprøvet i en 8. og en 9. klasse i de to nævnte skoler. Efter første afprøvning blev forløbet korrigeret og resulterede i følgende elevmateriale:

Elevmateriale: Kikkertforsøg

I skal lave forsøg med en meget simpel "kikkert", nemlig et rør, som I holder op mod det ene øje. Gennem kikkerten ser I på en væg. Hvis I prøver at gå lidt frem og tilbage, vil I opdage, at I sommetider kan se mere væg og sommetider mindre. I skal udforske, hvordan afstanden til væggen hænger sammen med, hvor meget I kan se.

Men I kan ikke udforske den helt frit, for I kan ikke frit vælge afstanden til væggen, da der ligger et "minefelt" foran væggen, startende ved ca. 2 meter fra væggen.

Placér en meterlineal på væggen og anvend paprullen fra en køkkenrulle som kikkert.
Forsøget går altså ud på at finde og beskrive en sammenhæng mellem:
– Afstand fra øjet til væggen. Vi kan kalde denne størrelse for x.
– Synsfeltets størrelse, dvs. hvor meget af linealen, som øjet kan se gennem kikkerten. Vi kan kalde denne størrelse for y.



1) Før I går i gang med selve eksperimentet, skal alle i gruppen lige prøve at lave en måling fra akkurat samme sted.
   – Er I enige om målene på x og y?
   – Hvis der er forskelle, diskuter så i gruppen, hvordan det kan være, og hvad I skal gøre for, at jeres mål i forsøget bliver nøjagtige.

2) Før I går i gang med selve eksperimentet, skal I bruge fantasien og hovedet til at besvare følgende spørgsmål:
   – Hvor skal man stå, hvis synsfeltet skal blive lille?
   – Hvor skal man stå, hvis synsfeltet skal være så stort som muligt?

3) Herefter kan I gå i gang med selve eksperimentet.
   – Mål synsfeltet ved mindst fire forskellige afstande.
   – Skriv resultaterne ned som sammenhørende talpar (x,y)
   – Prøv at beskrive en sammenhæng mellem x og y.

4) På grund af minefeltet kan I ikke komme til at lave forsøg, hvor I står tæt på væggen, men I kan i stedet bruge beskrivelsen i 3) til at undersøge det.
   – Brug jeres beskrivelse til at give et bud på, hvor stort synsfeltet er i afstanden 1 meter.
   – Kan I ud fra jeres beskrivelse bestemme størrelsen af synsfeltet, hvis I fx står 100 meter fra væggen (og vi forestiller os, at væggen er meget stor)?

5) Forbered jer på at forklare resultatet af jeres arbejde for en anden gruppe. Når en anden gruppe er klar til det, udveksler I erfaringer.

Efterfølgende fik eleverne en ny opgave. Den gik ud på at bestemme sammenhængen mellem forskellige kikkertlængder og synsfeltet på væggen, når de stod på samme sted og foretog målingen.

Analyse af kikkertforsøget

Indledningsvis skal vi pege på det faglige udbytte der kan komme ud af arbejdet med kikkertforsøget:

1. Funktionen som et sanset og oplevet fænomen, hvor en variabel opleves at afhænge af en anden

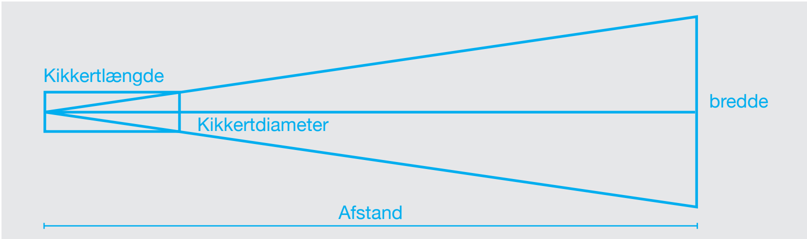
Man kan påstå, at opmærksomhed mod og forståelse af funktionelle sammenhænge i natur og samfund er meget vigtigt mål i skolen, men det funktionsbegreb, man skal kende, er ikke nødvendigvis det fra videnskaben kendte, men en mere intuitiv fornemmelse af sammenhæng mellem to størrelser/variable.

Frem for at fokusere på de mere videnskabelige funktioner som "y er en funktion af x, hvis der til enhver værdi af x svarer netop én værdi af y" kan man pege på en mere moderne og rimeligt korrekt definition fra en skolebog "En funktion er en sammenhæng mellem to variable størrelser. Den ene kaldes den uafhængige variabel x, den anden kaldes den afhængige variabel f(x)." (Matematrix 8, s. 128)

2. To meget vigtige funktionelle sammenhænge: direkte og omvendt proportionalitet

Kikkertforsøget lægger specielt op til de to traditionelt vigtigste funktionelle sammenhænge, nemlig den direkte og omvendte proportionalitet. Med kikkertforsøget syntes det muligt at kunne fokusere på dels variabelbegrebet og dels sammenhængen mellem de variable.

Hvis vi lægger os fast på, at det netop er disse funktioner, vi er interesserede i, skal vi sørge for, at det også er, hvad eleverne får ud af eksperimentet. Det betyder, at vi skal sørge for, at eleverne (som på figuren på næste side) måler afstanden til synsfeltet/væggen helt henne fra øjet og ikke fra enden af kikkerten.



Vi kan så se, at den lille og den store trekant er ensvinklede og dermed ligedannede, altså:

$$\frac{\text{bredde}}{\text{kikkertdiameter}} = \frac{\text{afstand}}{\text{kikkertlængde}}$$

Ved en almindelig køkkenrulle får man kikkertdiameter = 4,5 cm og kikkertlængde = 23 cm, og derfor

(ved passende valg af x og y)

$$\text{bredde} = \frac{4{,}5}{23} \cdot \text{afstand} \Leftrightarrow \text{bredde} = 0{,}2{\cdot}\text{afstand} \Leftrightarrow y = 0{,}2x$$

Eleverne kan få feedback på, om de havde løst opgaven, ved at de fx skærer røret ned til 10 cm og fjerner forhindringen foran væggen og afprøver resultatet på en kortere afstand. Ser vi på den næste opgave (den med samme ståsted og forskellige kikkertlængder) og fastholder afstanden til fx 4 meter eller 400 cm, kunne vi være interesseret i sammenhængen mellem bredde og kikkertlængde. Forskriften findes, og man får:

(ved passende valg af x og y)

$$\frac{\text{bredde}}{4{,}5} = \frac{400}{\text{kikkertlængde}} \Leftrightarrow \text{bredde} = \frac{1800}{\text{kikkertlængde}} \Leftrightarrow y = \frac{1800}{x}$$

Det er klart, at eleverne næppe tager denne teoretiske vej, men de kan nå et lignende mål med deres med eksperimentelle tilgang.

Beskrivelse af forløbet

Devolution

1) Elevmaterialet udleveres til eleverne.
   Kort mundtlig præsentation – om hvordan man ser i kikkerten og formålet med at finde sammenhænge:

Generelle sammenhænge

"Prøv at finde sammenhænge mellem de forskellige ting, der kan måles i eksperimentet: længden af kikkerten, afstanden hen til væggen og størrelsen af synsfeltet på væggen".

Konkrete gæt

"I skal gætte jer til, hvor meget af væggen man kan se, hvis man står med kikkerten inde i det forbudte område, fx i 3 m afstand. I kan gætte ret præcist, hvis I bruger det, I ved om sammenhængen." Eleverne skal i denne fase opleve et ejerskab til opgaven.

Handling

Eleverne læser det udleverede og går i gang med undersøgelsen. Det er afgørende, at instruktionen er klar nok til, at de kan arbejde uden lærer et godt stykke tid (a-didaktisk). Det kan være et problem, at der efter oplægget skal være et felt, som eleverne indledningsvist ikke kan komme ind i, da det er uvist, hvordan det vil virke, når læreren har overdraget opgaven til eleverne. Det kan være angivet ved en oval markering på gulvet: forbudt område.

Formulering

Her skal eleverne i bedste fald

1) nå frem til en beskrivelse af sammenhængene enten grafisk i form af et plot af punkter i et koordinatsystem eller et mere formelagtigt udtryk.
2) give kvalificerede gæt på undersøgelsens punkt: "konkrete gæt".

Validering

Eleverne kan validere deres gæt ved i denne fase at gå ind i det "forbudte område", så en del kan foregå i den a-didaktiske fase. Læreren kan også gå ind i diskussionen fx når det kommer til de "generelle sammenhænge", hvor der søges generelle funktionsudtryk for de to sammenhænge.

Institutionalisering

Man kan forestille sig følgende typer institutionaliseringer af viden fra situationen:

- De tal, I har målt på, kaldes variable, fordi vi har været interesseret i, hvordan de varierer.
- I har set, at der i dette eksperiment har været nogle sammenhænge mellem variable. Sådanne sammenhænge kaldes i matematikken for "funktioner".
- Vi er nået frem til nogle præcise udtryk, fx: som vi sommetider kalder den rette linjes ligning, men man bruger også udtrykket en ligefrem proportionalitet.
- Man kan kort sige, at x og y er ligefremt proportionale, hvis fx en fordobling af x giver en fordobling af y; og der kaldes en omvendt proportionalitet. Man kan kort sige, at x og y er omvendt proportionale, hvis en fordobling af x giver en halvering af y. Eller helt groft: jo større x jo mindre y.

Afsluttende bemærkninger

Under gennemførelsen af kikkertforsøget i 9. klasse opdager eleverne hurtigt funktionssammenhængen i det første forsøg. Med udsagn som "jo længere vi er væk jo større bliver feltet. Jo tættere vi er på jo mindre bliver feltet" og "det ligger alt sammen omkring, at det går 5 gange ind i" synes det oplagt, at eleverne er på rette spor.

Måleusikkerheden giver eleverne mange udfordringer. Ikke fordi de bekymrer sig over måleusikkerheden; uanset at de konstaterer, at "jeg kan se til 42", og "jeg kan se til 41,4", gør de tilsyneladende ikke mere ved det. Men måleusikkerheden medfører, at eleverne ikke direkte er i stand til at opstille den forskrift, de så ivrigt leder efter – eleverne er i første omgang nødt til at se på "den grafiske repræsentation" (plot af punkter i et koordinatsystem) og ud fra den søge at opstille en forskrift for sammenhængen.

Helt generelt viser det sig, at eleverne arbejder entusiastisk med opgaven, og at de ved at arbejde på denne måde i vid udstrækning får styrket deres forståelse af variabel- og funktionsbegrebet.

Det syntes oplagt, at der kan konstrueres mange gode undervisningsforløb ud fra teorien om didaktiske situationer.

LITTERATURLISTE

Brousseau, G. (1997): *The theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1999): Education and didactique of mathematics. *The Mexican Journal of Educational Science.* http://www.math.washington.edu/~warfield/Ed_and_Didact.html Lokaliseret den 6. maj 2006

Chamorro, M. C. (red.) (2003): *Didáctica de las Matemáticas para Primaria.* Madrid: PEARSON EDUCACIÓN.

Durand-Guerrier, V. (2003): Noter til forelæsning på DPU. Den 26. februar 2003

Gregersen, P.; Jensen, K.; Jensen, T.H.; Pedersen, B.B. (2001): *MatematriX 8.* København: Alinea.

Marbán Prieto, J. M. (2006): Personlig kommunikation den 26. april 2006.

Skott, J.; Jess, K.; Hansen, H.C. (2008): *Matematik for lærerstuderende. Delta. Fagdidaktik.* København: Samfundslitteratur.

Winsløw, C. (2006): Teorien om didaktiske situationer. *I Didaktiske Elementer.* København: Biofolia. s.133-153.